

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**  
**SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E SETOR DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM**  
**ENGENHARIA**

**MARCELO FRANCO DE OLIVEIRA**

**O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A**  
**ANÁLISE DE FLUXO DE CALOR UNIDIMENSIONAL**

**CURITIBA**

**2011**

**MARCELO FRANCO DE OLIVEIRA**

**O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A  
ANÁLISE DE FLUXO DE CALOR UNIDIMENSIONAL**

**Dissertação apresentada como requisito parcial à  
obtenção do grau de Mestre em Métodos Numéricos  
em Engenharia, Curso de Pós-Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de  
Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.**

**Orientador: Prof. Dr. José Antonio Marques Carrer**

**CURITIBA**

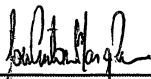
**2011**

# TERMO DE APROVAÇÃO

**Marcelo Franco de Oliveira**

## **O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A ANÁLISE DE FLUXO DE CALOR UNIDIMENSIONAL**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



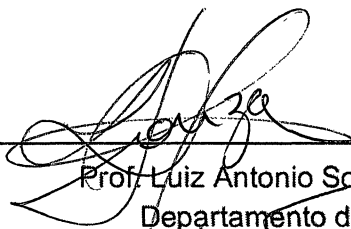
---

Prof. José Antonio Marques Carrer, D. Sc.  
Departamento de Matemática, UFPR



---

Prof. Webe João Mansur, Ph. D.  
Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ



---

Prof. Luiz Antonio Soares de Souza, D. Sc.  
Departamento de Estruturas, UEL



---

Prof. Roberto Dalledone Machado, D. Eng.  
Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR

Curitiba, 18 de março de 2011.

*Dedico esta obra  
aos meus pais que me  
ensinaram os preceitos  
mais importantes da vida,  
e me apoiaram em todas  
minhas decisões.*

"É desonroso para os homens sábios desperdiçarem seu tempo como escravos no trabalho de cálculo, que poderia ser relegado, com segurança, a qualquer um que usasse uma máquina."

(Leibnitz, 1646-1716)

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço profundamente a Deus, que com sua infinita graça e bondade esteve junto comigo me dando ânimo, forças e consolo nas horas de angústias, me ensinando a ter paciência, persistência e determinação para que eu pudesse cumprir mais essa etapa de minha jornada pela vida.

Aos meus pais, Dirceu e Olga que sempre estiveram me dando forças, apoio e muito incentivo para que eu não desanimasse durante essa etapa.

A minha amada esposa Débora, que teve muita paciência e sabedoria para entender todos os momentos em que estive ausente devido ao meu estudo. Agradeço a Deus por ter colocado essa pessoa abençoada em minha vida para estar ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço aos meus amigos e companheiros do CESEC, que sempre estiveram dispostos a me ajudar nas dificuldades que encontrei. Em especial a Daniele, Suellen, Bruno e China (Cleverson), que foram mais que amigos, foram minha família.

A Maristela, essa pessoa especial que, com sua alegria, nos contagia e não deixa que o desânimo nos tire a vontade de continuar, e seus cafezinhos que são muito importantes para o bom andamento dos trabalhos.

Ao meu orientador José Antonio Marques Carrer, que me concedeu a oportunidade de desenvolver esse trabalho, me dando todo o apoio, me ajudando a construir o conhecimento necessário para que esse trabalho pudesse ser realizado, e tendo paciência no decorrer de todo o processo.

Ao Raphael Fernando Scuciato, que foi um grande amigo que encontrei. Teve fundamental importância no desenvolvimento desse trabalho e principalmente na implementação dos códigos computacionais do presente trabalho.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>x</b>
<b>LISTA DE GRÁFICOS .....</b>	<b>xi</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>xii</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>xiii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>xiv</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.2 Objetivos.....	4
1.3 Organização .....	5
<b>2 PROPAGAÇÃO DE CALOR.....</b>	<b>6</b>
2.1 Calor .....	6
2.2 Propagação térmica .....	6
2.2.1 <i>Condução</i> .....	6
2.2.2 <i>Convecção</i> .....	6
2.2.3 <i>Radiação</i> .....	7
2.2.4 <i>Coefficiente de Condutividade térmica</i> .....	7
2.3 Equações Governantes.....	7
<b>3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....</b>	<b>9</b>
3.1 FUNÇÕES DE GREEN E SOLUÇÃO FUNDAMENTAL.....	9
<b>3.3 EQUAÇÕES CONSTITUINTES DO MEC</b> .....	<b>11</b>
3.3.1 <i>Nova formulação para o MEC-D</i> .....	15
4.1 EXEMPLO 1.....	19
4.1.1 <i>Validação dos Resultados do exemplo 1</i> .....	20
4.2 EXEMPLO 2.....	23
4.2.1 <i>Validação dos resultados do exemplo 2</i> .....	24
4.3 EXEMPLO 3.....	26
4.3.1 <i>Validação dos resultados do exemplo 3</i> .....	27
4.4 EXEMPLO 4.....	33
4.4.1 <i>Validação dos resultados do exemplo 3</i> .....	34
4.5 EXEMPLO 5.....	35
<b>5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....</b>	<b>38</b>
5.1 ORGANIZAÇÃO E FUNCIONAMENTO DO CÓDIGO .....	38



<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>41</b>
<b>6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>42</b>
<b>7 REFERÊNCIAS.....</b>	<b>43</b>
<b>APÊNDICE A.1.....</b>	<b>45</b>
<b>APÊNDICE A.2.....</b>	<b>50</b>
<b>APÊNDICE A.3.....</b>	<b>53</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Discretização do domínio do problema.....	13
Figura 1.2 Elemento de Domínio.....	18
Figura 1.3 Barra com fluxo constante.....	20
Figura 1.4 Barra com fluxo constante: temperatura no instante $t=1$ .....	22
Figura 1.5 Barra com fluxo constante: temperatura no instante $t=25$ .....	22
Figura 1.6 Barra com fluxo constante: temperatura no instante $t=100$ .....	22
Figura 1.7 Barra com condição inicial parabólica .....	24
Figura 1.8 Barra com condição inicial parabólica: temperatura no instante $t=1$ .....	25
Figura 1.9 Barra com condição inicial parabólica: temperatura no instante $t=25$ .....	26
Figura 1.10 Barra com condição inicial parabólica: temperatura no instante $t=166$ .....	26
Figura 1.11 Barra com condição de contorno variável .....	27
Figura 1.12 Barra com condição de contorno variável: temperatura no instante $t=1$ .....	28
Figura 1.13 Barra com condição de contorno variável: temperatura no instante $t=100$ .....	29
Figura 1.14 Barra com condição de contorno variável: temperatura no instante $t=200$ .....	29
Figura 1.15 Barra com condição de contorno variável: temperatura no instante $t=300$ .....	29
Figura 1.16 Barra com condição inicial: .....	33
Figura 1.17 Barra com condição inicial: temperatura no instante $t=1$ .....	35
Figura 1.18 Barra com condição inicial: temperatura no instante $t=25$ .....	35
Figura 1.19 Comprimento do Elemento .....	37

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 2: fluxo em $x=0$ .....	23
Gráfico 3 Condição inicial Parabólica: Potencial em $x=L/2$ .....	25
Gráfico 3 Condição de contorno variável: Potencial em $x=L/2$ e $K=1,0$ .....	28
Gráfico 4 Condição de contorno variável: Potencial em $x=L/2$ e $K=0,5$ .....	45
Gráfico 5 Condição de contorno variável: Potencial em $x=L/2$ e $K=0,1$ .....	46
Gráfico 6 Condição de contorno variável: Potencial em $x=L/2$ e $K=0,25$ .....	47
Gráfico 7 Condição de contorno variável: Potencial em $x=L/2$ e $K=0,01$ .....	47
Gráfico 8 Condição de contorno variável: Fluxo em $x=L/2$ e $K=0,25$ .....	48
Gráfico 9 Condição de contorno variável: Fluxo em $x=L/2$ e $K=0,5$ .....	48
Gráfico 10 Condição condição inicial $f(x)$ : Potencial em $x=L/2$ e $K=1$ .....	34
Gráfico 11 Teste de intervalos de tempo: Potencial em $x=L/2$ e $K=1$ .....	36

## LISTA DE SÍMBOLOS

$u$	Potencial, temperatura
$q$	Fluxo
$k$	Coeficiente de condutividade térmica do material
$\nabla$	Operador diferencial Laplaciano
$\partial$	Derivada parcial
$\delta$	Delta de Dirac
$x$	Ponto campo
$\xi$	Ponto fonte
$r$	Raio
$L$	Comprimento da barra
$l$	Comprimento do elemento
$\dot{u}$	Derivada do potencial no tempo
$\Delta t$	Intervalo de tempo adotado
$x_i$	Extremidade inicial da célula
$x_j$	Extremidade final da célula
$t_n$	Tempo inicial
$t_{n+1}$	Tempo final

## RESUMO

Com o desenvolvimento da engenharia, também se desenvolveram métodos para resolução de problemas relacionados a essa ciência aplicada. Dada a dificuldade de obtenção de soluções analíticas para as equações diferenciais que regem muitos problemas físicos, surgiu a necessidade de se desenvolver métodos numéricos para resolver esses problemas, ainda que de maneira aproximada. Com o desenvolvimento da informática, as simulações numéricas, entre elas o Método dos Elementos de Contorno (MEC), se tornaram uma poderosa ferramenta nas soluções dos diversos problemas da engenharia. Para este trabalho, tendo em vista o exposto, foi desenvolvida uma formulação do MEC para a solução de problemas de propagação de calor em domínios unidimensionais.

Devido à utilização da solução fundamental da estática, uma integral de domínio, cujo integrando é igual ao produto da solução fundamental com a derivada primeira do potencial em relação ao tempo, aparece nas equações do MEC. Como a integral de domínio é mantida nas equações, essa formulação é denominada MEC-D (onde a letra D está representando o domínio). Além da formulação tradicional MEC-D, uma nova formulação do MEC, baseada em uma ponderação do tipo colocação por subdomínios, é proposta. Para validação dos resultados, quatro exemplos são apresentados e comparados com suas soluções analíticas.

Uma nova será apresentada neste trabalho: considerando que as funções  $u$  e  $q$  possuem variação linear no tempo, a equação do MEC-D é integrada no intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , gerando a formulação designada MEC-T.

Para as análises numéricas foram desenvolvidos códigos computacionais em linguagem Fortran 2003.

## **ABSTRACT**

Together with the development of engineering, also the methods for solving problems related to that applied science presented a remarkable development during the last decades. Due to the difficulty of obtaining analytical solutions to the differential equations that govern the physical problems, the numerical methods were developed in order to overtake such a difficulty. Among them, the Boundary Element Method has demonstrated to be very effective in solving many problems in the field of engineering. In this work, a BEM formulation was developed to the solution of heat conduction problems in one-dimensional problems.

Due to the use of the static fundamental solution, a domain integral, whose integrand is equal to the product of fundamental solution with the first derivative of potential, appears in the BEM equations. Because this integral is kept in the equation, the result formulation is named D-BEM (D meaning domain). Beside the traditional D-BEM formulation, a new BEM formulation, based on sub-domain weighting residuals presented. For validation of results, four examples are presented and compared with the analytic solutions.

Computer codes in Fortran 2003, were developed for the numerical analyses.

# 1 INTRODUÇÃO

Os diversos fenômenos físicos têm sido ao longo da história, objeto de estudos e pesquisas.

Do ponto de vista matemático, os fenômenos físicos podem ser representados através de equações diferenciais, de acordo com LEITHOLD (1994), “as equações diferenciais têm uma importância muito grande nas aplicações da matemática. A indagação sobre a evolução de um dado fenômeno susceptível de tratamento matemático está ligada, quase sempre, a uma equação diferencial”. Em SODRE (2003), encontra-se o seguinte comentário: “Muitos fenômenos que ocorrem na óptica, eletricidade, ondulatória, magnetismo, mecânica, fluídos, biologia,..., podem ser descritos através de uma equação diferencial parcial”. Em GREENBERG (1998), lê-se: “As formulações matemáticas de problemas em ciência e engenharia são geralmente direcionadas por equações envolvendo derivadas de uma ou mais funções desconhecidas. Tais equações são chamadas de equações diferenciais”.

Existem diversos tipos de equações diferenciais: as mais comuns são equações diferenciais ordinárias (EDO), além das equações diferenciais parciais (EDP).

Nesse trabalho será feita uma abordagem da equação da difusão, que trata de problemas que envolvem calor; essa equação é uma EDP.

O avanço da engenharia tem sido acompanhado pelo desenvolvimento de muitos métodos de resolução de problemas. Os métodos analíticos são métodos que descrevem com mais precisão o problema físico em questão; porém, dependendo do tipo de problema a ser resolvido, encontrar uma solução analítica para a equação diferencial, ou o sistema de equações diferenciais, que governa o problema, acaba se tornando uma tarefa extremamente complicada e, em alguns casos, impossível de ser realizada. Um exemplo é encontrado na área de mecânica dos fluidos: na análise de dispersão de poluentes, as equações diferenciais utilizadas em muitos problemas não admitem soluções analíticas devido a não-linearidade do problema. Porém, com o desenvolvimento da sociedade e a preocupação com impactos ambientais, fazer análise de dispersão de poluentes se tornou algo extremamente importante em diversas áreas. Como alternativa à solução desse e de outros problemas, e contando com o desenvolvimento tecnológico representado pelo computador, foram desenvolvidos e

aperfeiçoados métodos numéricos que conseguem aproximar as soluções exatas. Além disso, esses métodos têm se popularizado cada vez mais, entre os quais podem ser mencionados o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O MEC tem sido cada vez mais utilizado na solução de problemas, principalmente nos casos onde o domínio se estende ao infinito ou problemas de propagação de ondas.

Inicialmente o MEC era chamado de Método das Equações Integrais, devido ao fato de sua equação constituinte ser composta por integrais de contorno e domínio; entretanto, como havia outros métodos que utilizavam equações integrais, o MEC passou a ser chamado de Método dos Elementos de Contorno, por utilizar apenas valores ao longo do contorno do problema. A principal característica do MEC é a redução na dimensão do problema, devido à maneira que a malha do problema é discretizada, por exemplo, em uma geometria tridimensional, a malha do contorno se reduz a uma malha bidimensional, podendo ser discretizada em elementos triangulares ou quadriláteros. De acordo com BREBBIA e DOMINGUEZ (1989), o Método de Contorno tem emergido como uma poderosa alternativa aos Elementos Finitos, em casos particulares onde uma melhor acurácia é requerida devido a problemas como concentração de tensões ou onde o domínio se estende ao infinito.

O MEC pode ser aplicado em uma ampla variedade de problemas, pois de acordo com SENNA (2003): “Uma das principais características do MEC é sua diversidade em aplicações, cobrindo muitas áreas da Física e da Engenharia, como por exemplo, em mecânica estrutural mecânica da fratura, plasticidade, visco plasticidade, geomecânica, entre outras áreas”. De acordo com WROBEL (2002): “A mais geral e efetiva técnica numérica para resolver equações integrais é o Método dos Elementos de Contorno (MEC)”.

Para um estudo mais aprofundado das técnicas citadas, o leitor pode se reportar a BREBBIA, DOMINGUEZ, (1989).



Inicialmente esse trabalho aborda a aplicação do MEC na análise de problemas de propagação térmica transiente em domínios unidimensionais, na presença de diversos tipos de condições de contorno e condições iniciais.

Do ponto de vista da técnica dos resíduos ponderados, para o desenvolvimento da formulação adotada aqui, denominada MEC-D, onde a letra D representa domínio, foi adotada, como função de ponderação, a solução fundamental do problema estático correlato. Como consequência, aparece nas equações do MEC uma integral de domínio, cujo integrando é constituído pelo produto da solução fundamental com a derivada de primeira ordem do potencial em relação ao tempo. Observe-se que, o problema sendo unidimensional, o contorno é constituído apenas pelos nós fronteiros do intervalo fechado que constitui o domínio do problema. Assim, a única aproximação é adotada para as células internas, que são sub-intervalos do intervalo original. Nessas células admite-se variação linear para a derivada do potencial e a integração, dada a simplicidade das expressões envolvidas, pode ser realizada analiticamente. A derivada de primeira ordem é aproximada com o emprego da fórmula de diferença finita regressiva, por exemplo SMITH, 2004. Consequentemente, para o processo de marcha no tempo adotado, os valores no tempo  $t_{n+1}$  são calculados somente em função dos valores no tempo  $t_n$ .

A formulação será avaliada através da análise de vários exemplos, nos quais os resultados obtidos via MEC serão comparados com as soluções analíticas.

Uma nova formulação também será apresentada. Considerando que todas as funções  $u$  e  $q$  (onde  $u$  representa o potencial, ou temperatura, e  $q$  representa o fluxo), variam ao longo do tempo, a integral básica da formulação MEC-D será integrada, por exemplo, de um tempo  $t_n$  até um tempo  $t_{n+1}$ , à maneira da técnica de ponderação por subdomínios. Essa formulação será denominada aqui de MEC-T, onde a letra T representa a integração no tempo.

Procedendo desse modo, a integral de domínio passa a apresentar somente valores do potencial e as condições iniciais podem ser impostas diretamente. Também para essa formulação são apresentados diversos exemplos, cujos resultados também são comparados com as soluções analíticas.

O avanço computacional tem contribuído muito para o desenvolvimento científico e consequentemente para o avanço da engenharia, pois de acordo com

CHAPMAN (2004), “O computador foi provavelmente a invenção mais importante do século XX. Isso afetou nossas vidas de muitas maneiras”.

“É importante mencionar que, entre as várias linguagens de programação voltadas para análise numérica, uma linguagem que tem se mostrado muito poderosa é o Fortran”, CHAPMAN (2004). A palavra Fortran vem do termo inglês “FORmula TRANslation” ou em português Tradução de Fórmulas.

A linguagem de programação Fortran tem um papel fundamental nesse avanço, pois é uma linguagem que foi desenvolvida com a finalidade de ser utilizada na ciência da computação e análise numérica.

Pouco tempo depois de seu desenvolvimento, na década de 50, o Fortran começou a ser amplamente utilizado pela comunidade científica de todo o mundo, pois de acordo com CHAPMAN (2004), “Fortran é a linguagem preeminente para computação científica geral”.

A IBM foi a primeira empresa a desenvolver um compilador para a linguagem Fortran, como podemos verificar em CHAPMAN (2004), O computador IBM 704 foi o primeiro computador a usar a linguagem FORTRAN. Essa linguagem logo sofreu várias alterações e por isso existem várias versões, sendo que cada versão que surgiu do Fortran só enriqueceu o poder de desenvolvimento dos códigos. Atualmente o Fortan é uma das linguagens de programação mais eficientes para fins científicos e numéricos.

A implementação de códigos computacionais é uma parte muito importante na análise de problemas de engenharia. WROBEL (2002): “Com avanços em modelagem numérica e o sempre crescente poder computacional, técnicas de modelagem baseadas em equações integrais podem ser usadas agora na simulação de muitos problemas práticos da engenharia”.

Os códigos computacionais gerados com base na formulação do MEC são de fácil implementação e é possível utilizar programas geradores de geometrias e malhas. Os códigos desenvolvidos neste trabalho foram escritos em linguagem Fortran 2003.

## 1.2 Objetivos

Os objetivos principais do presente trabalho entre outros são:

- a. Revisão e apresentação da teoria de potencial linear unidimensional;
- b. Apresentação e desenvolvimento da teoria do MEC aplicado à problemas de distribuição térmica transiente unidimensional;
- c. Implementação de códigos computacionais aplicados ao Método dos elementos de Contorno em linguagem Fortran 2003
- d. Desenvolvimento de uma formulação alternativa para o MEC, denominada de MEC-T;
- e. Implementação de códigos computacionais para a formulação alternativa;
- f. Comparação dos resultados obtidos com a implementação do MEC-D e do MEC-T com as soluções analíticas.

### 1.3 Organização

O trabalho será organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, na primeira parte, será feita uma abordagem da condução de calor e propagação térmica; na segunda parte serão apresentadas as equações governantes da condução de calor.

No capítulo 3 serão apresentadas a teoria do Método dos Elementos de Contorno e uma breve abordagem sobre funções de Green e solução fundamental, que será utilizada para obtenção das equações que constituem o MEC.

No capítulo 4 são apresentados exemplos numéricos, e feita a comparação e validação dos resultados obtidos, junto com as soluções analíticas.

No capítulo 5 é apresentada a organização dos códigos desenvolvidos no decorrer do trabalho.

Para finalizar, as considerações finais sobre os resultados obtidos serão feitas no capítulo 6.

## 2 PROPAGAÇÃO DE CALOR

### 2.1 Calor

O calor é uma forma de energia, a temperatura é uma medida utilizada para determinar a quantidade de calor em um determinado corpo, ou seja, o grau de agitação das moléculas desse corpo. A transmissão de calor se dá de um corpo com maior quantidade de energia (calor), para um corpo com menor energia. Quanto mais energia um corpo recebe, mais suas moléculas se agitam, ou sua temperatura aumenta.

### 2.2 Propagação térmica

A transmissão térmica ou de calor é uma troca de energia entre dois corpos que têm temperaturas diferentes. O que tem mais calor cede uma quantidade ao outro, até que a temperatura dos dois se iguale, e nesse momento essa transmissão de calor pára. A transferência de calor entre dois meios pode acontecer de três formas distintas: por condução, por convecção e por radiação.

#### 2.2.1 Condução

De acordo com CARROM e GUIMARÃES (2003), “quando as partículas de um sólido vibram, elas transmitem energia para as partículas vizinhas”.

Quando algumas moléculas de um corpo começam a se agitar, adquirem uma certa velocidade em seu deslocamento; devido a esse deslocamento, colidem com moléculas vizinhas e transferem parte de sua energia cinética para as que estão paradas. Estas, por sua vez, começam a se deslocar, e repetem o processo descrito. Essa transferência de energia entre as moléculas é chamada de fluxo de calor por condução.

#### 2.2.2 Convecção

É o fluxo de calor devido a um movimento de substâncias quentes para regiões mais frias. Considere-se, por exemplo, uma panela com água sendo aquecida. Quando a

água do fundo aquece, a água da superfície ainda está fria; porém, como a densidade da água quente é menor do que a da fria, a água quente sobe até a superfície, enquanto a água fria desce para o fundo. Isso ocorre devido à ação da gravidade, em outras palavras, os corpos menos densos tendem a flutuar sobre os mais densos. Esse processo não é bem um processo de troca de calor, mas sim, um processo de troca de massas e é chamado de convecção.

### *2.2.3 Radiação*

Esse tipo de transferência de calor não envolve o deslocamento de massa ou partículas. A energia térmica pode ser utilizada para gerar luz e, sendo luz, se propaga através de ondas eletromagnéticas, que carregam energia e são capazes de se mover de um local para outro sem necessidade de um meio material para isso. Um exemplo disso, é como o sol transmite calor para a Terra, as ondas de radiação se propagam no vácuo. Pois, de acordo com CARRON e GUIMARÃES (2003), “pessoas próximas a uma fogueira são “atingidas” por uma quantidade de energia transmitida por ela por meio de ondas eletromagnéticas”.

### *2.2.4 Coeficiente de Condutividade térmica*

É uma propriedade física que está relacionada com a habilidade que um corpo tem de conduzir calor. Quanto maior o valor dessa propriedade, maior é a capacidade que um corpo tem de conduzir ou absorver calor. Pode ser definida como a energia transferida sob a forma de calor por segundo, através de uma superfície com  $1 \text{ m}^2$  de área e 1 m de espessura, quando a diferença de temperaturas entre as duas faces dessa superfície é de  $1^\circ$  grau Kelvin.

## **2.3 Equações Governantes**

Na física, a equação do calor é um modelo matemático que descreve a difusão térmica em meios sólidos, ou seja, é um modelo que descreve como uma quantidade de calor se propaga em um corpo qualquer. Essa equação diferencial parcial também é

conhecida como equação da difusão. A forma mais elementar dessa equação, para o caso de um sólido homogêneo e sem geração interna de calor, é da forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.1)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam as coordenadas espaciais do sólido tridimensional. Em problemas bidimensionais, são duas as coordenadas espaciais,  $x$  e  $y$ , por exemplo. Para problemas unidimensionais, que constituem o objeto de estudo desse trabalho, há apenas uma coordenada espacial, por exemplo, a coordenada  $x$ . Na equação (1.1),  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica do material.

Com a utilização do operador diferencial Laplaciano,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u \quad (1.2)$$

a equação (1.1) é reescrita como:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.3)$$

Como o presente trabalho abordará uma aplicação em um domínio unidimensional dessa equação, a equação (1.2) é escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.4)$$

Caso o problema a ser resolvido possua geração interna de calor, a equação é escrita de forma semelhante, apresentando um termo a mais,  $f$ , que corresponde a essa geração interna de calor, que pode ser representada por uma função. Nesse caso, a equação tem a forma dada abaixo:

$$\nabla^2 u + f = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.5)$$

### 3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Nas últimas décadas, o MEC recebeu atenção especial de pesquisadores do mundo todo; em decorrência, se tornou uma importante técnica numérica para resolver muitos problemas físicos. Devido ao intenso trabalho de pesquisa, um grande número de formulações foi desenvolvido para o MEC. As seguintes citações permitem avaliar a importância do MEC:

*Em 1926, Trefftz publicou um artigo intitulado “Uma alternativa ao método Ritz”, onde ele sugeriu que, em vez de funções que satisfaçam as condições de contorno, pudessem ser utilizadas funções que satisfizessem apenas a equação diferencial governante. Esse artigo forneceu a idéia básica para o menos conhecido Método dos Elementos de Contorno. (MEC)<sup>1</sup>.*

*O método dos elementos de contorno tem emergido como uma poderosa alternativa ao método dos elementos finitos<sup>2</sup>.*

É importante observar que, hoje em dia, não se fala tanto em um método se apresentar como alternativa a outro método. A tendência, evidenciada em vários trabalhos, por exemplo SOARES(2009), é o acoplamento entre o MEC e o MEF.

#### 3.1 FUNÇÕES DE GREEN E SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Dada a equação diferencial linear não-homogênea:

$$Df(x) = g(x) \quad (1.6)$$

sendo as funções  $f$  e  $g$  definidas em todo domínio do problema e  $D$  um operador

---

<sup>1</sup>BEER, G. **Programing the boundary element method**. An introduction for engineers.

<sup>2</sup>BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J., **Boundary elements: an introductory course**, Computacional Mechanics Publications and McGraw-Hill, Southhampton, 1989.

diferencial, pode-se resolver a equação (1.6) utilizando uma função de Green,  $G(x, \xi)$ , que é a solução da equação:

$$D_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (1.7)$$

A função  $G(x, \xi)$  representa o efeito, em um ponto  $x$ , devido a uma fonte que age em um ponto escolhido  $\xi$ ; essas concentrações de cargas em um ponto específico são denominadas delta de Dirac, e representa-se por  $\delta(x - \xi)$ . Quando  $x \neq \xi$ , tem-se exatamente a forma homogênea da equação (1.6).

A função delta de Dirac é definida por suas propriedades, onde a integral do produto de uma função qualquer, por uma função delta de Dirac, resulta na própria função em um ponto  $\xi$ . Uma das de maior emprego no MEC, é descrita pela equação (1.8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x - \xi) d\xi = f(\xi) \quad (1.8)$$

A solução fundamental utilizada na formulação MEC-D é a solução fundamental do problema estático, isto é, não dependente do tempo.

Para o caso bidimensional, a solução fundamental é dada por BREBBIA e DOMINGUEZ (1989):

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.9)$$

Para o caso tridimensional, a solução fundamental é dada por BREBBIA e DOMINGUEZ (1989):

$$u^*(\xi, x) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (1.10)$$



onde  $r$  é a distância entre pontos campo,  $X$ , e fonte,  $\xi$ . Uma dificuldade encontrada nos casos acima é representada pela singularidade que aparece quando o ponto campo e ponto fonte coincidem.

Para problemas em domínios unidimensionais a solução fundamental é dada por, VLADIMIROV (1979):

$$u^*(\xi, x) = \frac{|x - \xi|}{2} \quad (1.11)$$

Essa função pode ser interpretada como sendo o efeito no ponto campo  $x$ , de uma fonte concentrada aplicada no ponto fonte  $\xi$ .

A dedução da equação (1.11) está apresentada no apêndice A2.

Observe-se que, agora, a coincidência dos pontos campo e fonte não produz singularidade, com isso, para domínios unidimensionais é possível calcular as integrais que aparecem no problema envolvendo  $u^*$  analiticamente, sem a necessidade de integrais numéricas.

### 3.3 EQUAÇÕES CONSTITUINTES DO MEC

Inicialmente a equação constituinte do MEC é escrita da seguinte maneira para problemas 1D, Brebbia et al. (1984):

$$\begin{aligned} u(\xi, t) = & u^*(\xi, x) \cdot q(x, t)|_{x=\ell} + u^*(\xi, x) \cdot q(x, t)|_{x=0} \\ & - q^*(\xi, x) u(x, t)|_{x=\ell} - q^*(\xi, x) u(x, t)|_{x=0} + \frac{1}{k} \int_0^\ell u^*(\xi, x) \cdot \dot{u}(x, t) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Note-se a presença da integral de domínio na equação (1.12). Esta integral será conservada na formulação; daí a denominação MEC-D.

A partir da equação (1.12) forma-se um sistema de equações matricial:

$$\begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} & \dots & H^{1n} \\ H^{21} & H^{22} & \dots & H^{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ H^{m1} & H^{m2} & \dots & H^{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(l) \\ \vdots \\ u(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{11} & G^{12} \\ G^{21} & G^{22} \\ \vdots & \vdots \\ G^{m1} & G^{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ q(l) \\ \vdots \\ q(n) \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & \dots & M^{1n} \\ M^{21} & M^{22} & \dots & M^{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ M^{m1} & M^{m2} & \dots & M^{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}(0) \\ \dot{u}(l) \\ \vdots \\ \dot{u}(n) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Ou de forma mais resumida, escrita apenas em notação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c \\ \mathbf{G}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^c \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^c \\ \dot{\mathbf{u}}^d \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

onde o vetor  $\mathbf{u}$  contém os valores do potencial e o vetor  $\mathbf{q}$  contém os valores de fluxo. Os superíndices  $c$  e  $d$  correspondem aos nós de contorno e domínio respectivamente. Note-se que se o valor conhecido em um ponto qualquer do contorno for fluxo, é o potencial que precisa ser calculado, se o potencial for conhecido o fluxo precisa ser calculado, isto é, as condições de contornos são mutuamente excludentes, onde um valor é conhecido o outro precisa ser calculado.

Os valores dos fluxos que estão armazenados em  $\mathbf{q}$  são obtidos derivando a função  $u$ , ou seja,

$$\frac{du}{dn} = q \quad (1.15)$$

e

$$\frac{du^*}{dn} = q^* \quad (1.16)$$

Como o problema é unidimensional, o contorno é constituído por apenas dois pontos, um em cada extremidade da barra; logo, o vetor  $\mathbf{q}$  tem apenas dois elementos, que são correspondentes aos nós do contorno. As dimensões das matrizes estão relacionadas com o número de nós utilizadas na discretização do problema.

O desenvolvimento da equação (1.4) através do MEC até a obtenção da equação constituinte do MEC, apresentada na equação (1.12), para a formação do sistema de equações representado em (1.13) é apresentado no anexo A1 do presente trabalho.

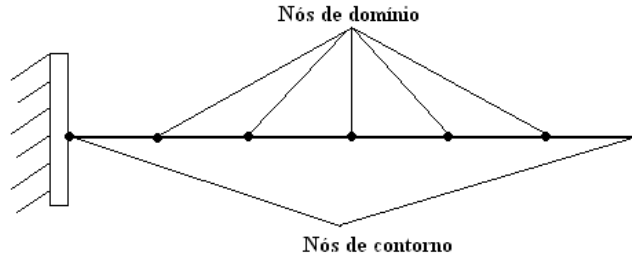
A função  $\dot{u}$  representa a derivada primeira em relação ao tempo e é calculada (aproximada) utilizando a fórmula de diferença regressiva do MDF da seguinte forma:

$$\dot{u} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \quad (1.17)$$

sendo  $\Delta t$  o intervalo de tempo adotado para análise do problema.

As dimensões das matrizes são formadas da seguinte forma: para as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$ , o número de linhas e de colunas são iguais, ou seja, são matrizes quadradas e são montadas de acordo com o número total de nós do problema, somando a quantidade de nós do domínio com os nós do contorno.

Na matriz  $\mathbf{G}$  a quantidade de linhas é formada da mesma maneira que nas matrizes anteriores e a quantidade de colunas é igual à quantidade de nós do contorno: nesse caso existem apenas dois nós de contorno. Para uma melhor visualização da geometria, segue abaixo uma representação.



**Figura 1.1** Discretização do domínio do problema

Substituindo a equação (1.17) na equação (1.14), ou seja, substituindo a derivada pela sua aproximação em diferenças finitas, o sistema de equações (1.13) pode ser reescrito como segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1}^c \\ u_{n+1}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c \\ \mathbf{G}^d \end{bmatrix} [q_c^{n+1}] + \frac{1}{k\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1}^c - u_n^c \\ u_{n+1}^d - u_n^d \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Pode-se representar a equação (1.18) por:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{q} + \frac{1}{k} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (1.19)$$

Introduzindo-se as condições de contorno em (1.18) chega-se à um sistema do tipo  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{A}$  é a matriz dos coeficientes,  $\mathbf{x}$  é o vetor de incógnitas a serem calculadas e  $\mathbf{b}$  é o vetor independente, que contém a contribuição das condições de contorno e dos instantes anteriores.

Como o problema é transiente, é necessário resolver esse sistema de equação a cada passo de tempo da análise.

O vetor que está multiplicando a matriz  $\mathbf{M}$  é formado através de condições iniciais, esses valores são informados no início da análise. Como são valores conhecidos, multiplica-se a matriz  $\mathbf{M}$  pelo vetor que contém as condições iniciais, faz-se as trocas das colunas entre as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , e o que fica no lado direito da equação, são apenas valores conhecidos, formando assim o vetor de resposta para o sistema de equações.

Como o problema é transiente, o vetor de condições iniciais será atualizado a cada passo de tempo, esse vetor receberá os valores calculados no passo anterior, ou seja, no tempo  $n+1$  o vetor recebe as resposta da análise do tempo anterior  $n$ .

Para entender como o sistema é montado, voltando à equação (1.13), os valores em destaque significam valores conhecidos do problema (condições de contorno), e os em preto significam os valores a serem calculados (note-se que se admite conhecido o valor da derivada no tempo em  $t=0$ , ou seja, admite-se que a condição inicial é definida por uma expressão analítica).

$$\begin{bmatrix} -G^{11} & H^{12} & \dots & H^{1n} \\ -G^{21} & H^{22} & \dots & H^{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -G^{m1} & H^{m2} & \dots & H^{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n+1}(0) \\ u_{n+1}(l) \\ \vdots \\ u_{n+1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H^{11} & G^{12} \\ -H^{21} & G^{22} \\ \vdots & \vdots \\ -H^{m1} & G^{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ q(l) \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$+ \frac{1}{k\Delta t} \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & \dots & M^{1n} \\ M^{21} & M^{22} & \dots & M^{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ M^{m1} & M^{m2} & \dots & M^{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0)_{n+1}^c - u(0)_n^c \\ u(l)_{n+1}^c - u(l)_n^c \\ \vdots \\ u(n)_{n+1}^d - u(n)_n^d \end{bmatrix}$$

### 3.3.1 Nova formulação para o MEC-D

Agora será apresentada a nova formulação proposta para o MEC-D, que será representada por MEC-T (T significa implicitamente que foi efetuada uma integração no tempo). Considera-se, inicialmente, que as funções  $u$  e  $q$  possuem variação linear no tempo. Em seguida a equação (1.19) é integrada no intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  e a equação (1.19) é reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{H} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{u}(t) dt = \mathbf{G} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{q}(t) dt + \frac{1}{k} \mathbf{M} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{u}} dt \quad (1.19)$$

Após a integração, obtém-se:

$$\int u(t) dt = \frac{(u_{n+1} + u_n) \cdot \Delta t}{2} \quad (1.20)$$

$$\int q(t) dt = \frac{(q_{n+1} + q_n) \cdot \Delta t}{2} \quad (1.21)$$

e

$$\int \dot{u} dt = u(t) = (u_{n+1} - u_n) \quad (1.22)$$

Agora substituindo (1.20), (1.21) e (1.22) em (1.19) tem-se:

$$\frac{\Delta t}{2} \mathbf{H} \cdot (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G} \cdot (\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{q}_n) + \frac{1}{k} \mathbf{M} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \quad (1.23)$$

Pode-se reescrever a equação (1.23) da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{H}} u_{n+1} + \bar{\mathbf{H}} u_n = \bar{\mathbf{G}} q_{n+1} + \bar{\mathbf{G}} q_n + \bar{\mathbf{M}} u_{n+1} + \bar{\mathbf{M}} u_n \quad (1.24)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}$$

$$\bar{G} = \frac{\Delta t}{2} G$$

$$\bar{M} = \frac{1}{k} M$$

Agrupando as matrizes que tem fatores em comum, equação (1.24) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left( \bar{H} - \bar{M} \right) u_{n+1} = \bar{G} q_{n+1} + \bar{G} q_n + \left( \bar{H} - \bar{M} \right) u_n \quad (1.25)$$

ou:

$$\bar{\bar{H}} u_{n+1} = \bar{G} q_{n+1} + \bar{G} q_n + \bar{\bar{H}} u_n \quad (1.26)$$

onde:

$$\bar{\bar{H}} = \left( \bar{H} - \bar{M} \right)$$

Os valores de  $u_n$  vêm das condições iniciais e os valores de  $q_n$  são as derivadas de  $u_n$ , ou seja,  $q_n = \frac{du_n}{dx}$  quando  $n=0$ . Estes valores são informados no começo da análise. Agora o processo para resolver a equação (1.26) é o mesmo que feito anteriormente para resolver a equação (1.18).

É importante mencionar que, no início da análise, que é, quando  $n=0$ , as condições iniciais podem ser impostas diretamente na equação (1.21).

A montagem das matrizes é feita da seguinte forma:

A matriz  $\mathbf{H}$  resulta do termo  $u(x).q^*(\xi, x)$ , a matriz  $\mathbf{G}$  do termo  $q(x).u^*(\xi, x)$  e a matriz  $\mathbf{M}$  do termo  $u^*(\xi, x)\dot{u}(x)$ . As matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  seguem um padrão de formação, que é facilmente obtido, facilitando a implementação.

Para matriz  $\mathbf{H}$  tem-se o seguinte padrão:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

O termo  $I$  na matriz  $\mathbf{H}$ , indica uma sub-matriz identidade.

Para a matriz  $\mathbf{G}$  tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{[1-(i-1)].L}{2*Nelem} & \frac{[(i-1)-1].L}{2*Nelem} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Onde  $L$  é o comprimento da barra, e  $Nelem$  é a quantidade de elementos em que a barra foi dividida.

### 3.3.1 Integral do domínio

A matriz  $\mathbf{M}$  é obtida através de uma integração no domínio e pode ser obtida por:

$$\int_{x_i}^{x_j} \frac{|x-\xi|}{2} \cdot [\phi_i \quad \phi_j] dx \quad (1.29)$$

onde  $\phi_i$  e  $\phi_j$  são funções de forma dadas por:

$$\phi_i = \frac{(x-x_j)}{\Delta l} \quad (1.30)$$

e

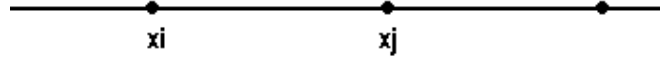
$$\phi_j = \frac{(x_i - x)}{\Delta l} \quad (1.31)$$

onde  $\Delta l = x_j - x_i$ .

Agora substituindo (1.30) e (1.30) em (1.29) tem-se:

$$\int_{x_i}^{x_j} \frac{|x - \xi|}{2} \cdot \left[ \frac{(x - x_j)}{\Delta l} \quad \frac{(x_i - x)}{\Delta l} \right] dx \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} \quad (1.32)$$

onde  $x_i$  e  $x_j$  são as coordenadas das extremidades da célula que, para o problema unidimensional, é definida pelo intervalo fechado  $[x_i, x_j]$  (figura 1.2).



**Figura 1.2** Elemento de Domínio

A integral da equação (1.32) pode ser separada em duas integrais.

$$\int_{x_i}^{x_j} \frac{|x - \xi|}{2} \cdot \frac{(x - x_j)}{\Delta l} dx \quad (1.33)$$

$$\int_{x_i}^{x_j} \frac{|x - \xi|}{2} \cdot \frac{(x_i - x)}{\Delta l} dx \quad (1.34)$$

Agora é possível desenvolver analiticamente as integrais em cada uma das equações acima.

É importante observar nas integrais acima, que existe um módulo, logo, deve-se levar em consideração a posição do ponto  $x$  em relação à  $\xi$ , sendo  $x - \xi$  se  $x > \xi$ , ou  $\xi - x$  se  $x < \xi$ .

A matriz **M** é montada utilizando as expressões resultantes da integração do domínio do problema.



## 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A transmissão de calor em corpos sólidos se dá da região com potencial maior para a região com potencial menor, ou seja, as partes com maior quantidade de calor cedem calor para as partes com potencial menor. Esse processo acontece até a temperatura se estabilizar em todo o corpo; nesse momento, a transferência de energia pára até que a condição de equilíbrio, conhecida como estado estacionário, seja alcançada.

Agora serão apresentados alguns exemplos de problemas, que serão resolvidos sempre em três partes. A primeira irá mostrar os resultados obtidos com a formulação tradicional do MEC-D, a segunda apresentará os resultados obtidos com a formulação MEC-T, apresentada no capítulo 3, e por final, a solução analítica, que servirá como base para comparação e validação dos resultados obtidos com as técnicas numéricas.

Essas três soluções estão apresentadas em um mesmo gráfico para melhor visualização da eficiência de cada formulação.

Os procedimentos utilizados para o desenvolvimento de uma solução analítica para a equação (1.4) com condições de contorno constante e condição inicial, é apresentado no apêndice A3.

### 4.1 EXEMPLO 1

Será feita uma análise da distribuição térmica em uma barra de comprimento  $L=5$ , com condição inicial nula e com as seguintes condições de contorno:

$$u(0,t) = 0$$

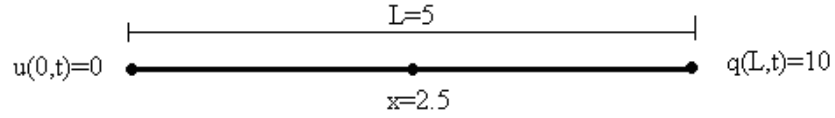
$$q(L,t) = 10$$

Para esse exemplo os seguintes valores serão adotados:

$$k = 0,5$$

$$\Delta t = 0,1$$

Geometricamente tem-se o seguinte problema:



**Figura 1.3 1Barra com fluxo constante**

A solução analítica é dada por:

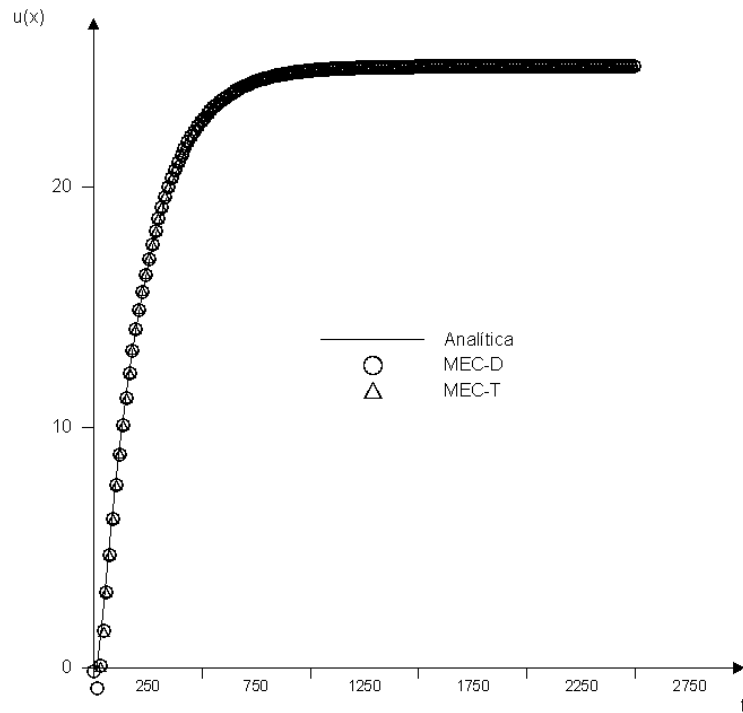
$$u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot e^{-k \cdot \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right)^2 \cdot t} + \frac{10}{L} \cdot x \quad (1.35)$$

com

$$B_n = \frac{4 \cdot \left[ -2 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) + n \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{2}\right) \right]}{n^2 \cdot \pi^2}$$

#### 4.1.1 Validação dos Resultados do exemplo 1

Para a validação dos resultados, um gráfico é apresentado para os valores de  $u$ , ou seja, do potencial no ponto  $x = 2,5$ , isto é, o ponto central.



**Gráfico 1: potencial em  $x=L/2$**

Como é possível perceber no gráfico 1.1, os resultados obtidos com a formulação MEC-D e os obtidos com a nova formulação MEC-T, apresentaram boa concordância entre si e com a solução analítica. É importante ainda ressaltar que esses resultados foram obtidos com uma malha com pouco refinamento, pois quanto mais refinada uma malha for, mais as soluções numéricas se aproximam da solução analítica. Isso mostra como o MEC representa muito bem o problema físico. Note-se que a discretização do domínio envolveu um único ponto interno.

Para uma melhor visualização do problema, a evolução da distribuição da temperatura ao longo da barra está representada nas figuras (1.4), (1.5) e (1.6).

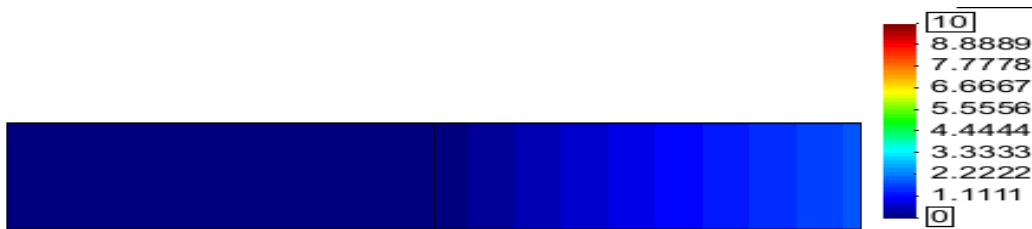


Figura 1.4 Barra com fluxo constante: temperatura no instante  $t=1$ .

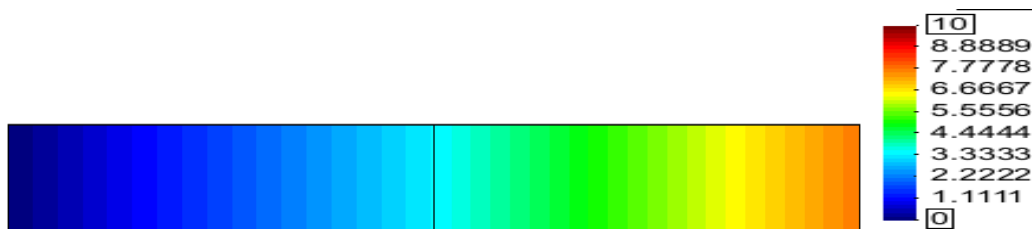


Figura 1.5 Barra com fluxo constante: temperatura no instante  $t=25$

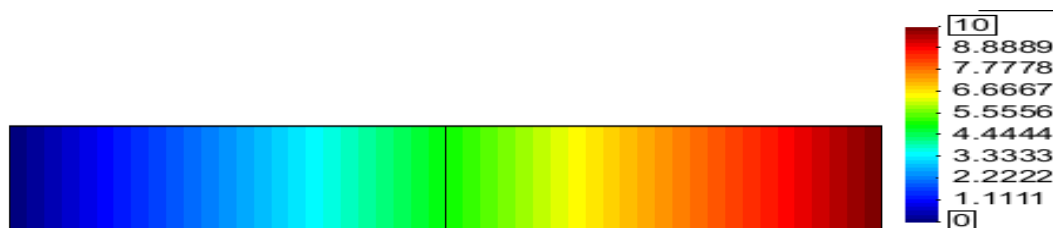
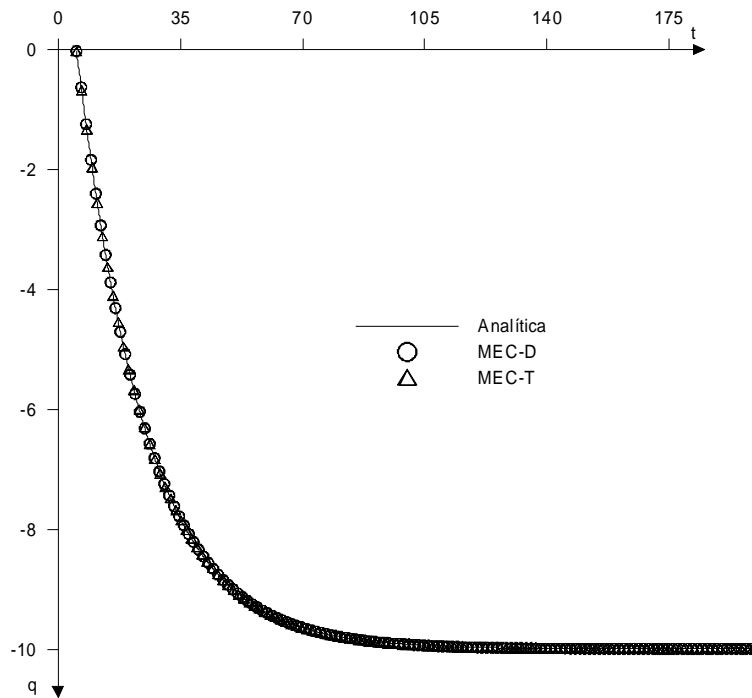


Figura 1.6 Barra com fluxo constante: temperatura no instante  $t=1000$ .

Agora é feita uma análise do fluxo de calor em uma das extremidades da barra. O fluxo é analisado no nó 1, onde a condição de contorno imposta foi 0 para a temperatura. Se a temperatura se manteve constante em um valor fixo, isso significa que existe um fluxo de calor saindo por esse ponto.



**Gráfico 1: fluxo em x=0**

## 4.2 EXEMPLO 2

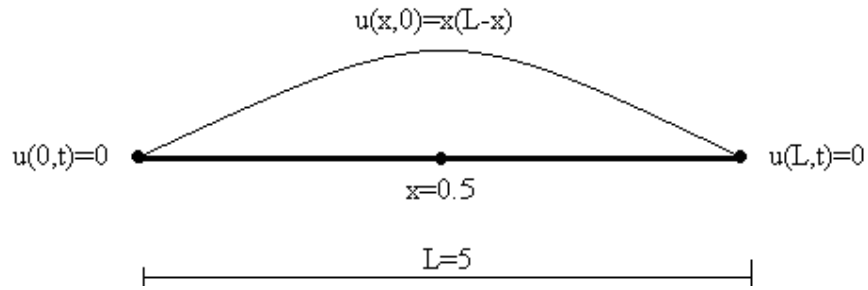
O exemplo que será apresentado agora tem as seguintes condições de contorno:

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

e condição inicial (ver figura 1.7):

$$u(x,0) = x(L-x)$$



**Figura 1.7 1Barra com condição inicial parabólica**

Para esse exemplo os seguintes valores serão adotados:

$$k=0.5$$

$$\Delta t = 0.1$$

A solução analítica obtida para esse exemplo é a seguinte:

$$u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi \cdot x}{L}\right) \cdot e^{-k \cdot \left(\frac{n\pi \cdot x}{2 \cdot L}\right)^2 \cdot t} \quad (1.36)$$

onde:

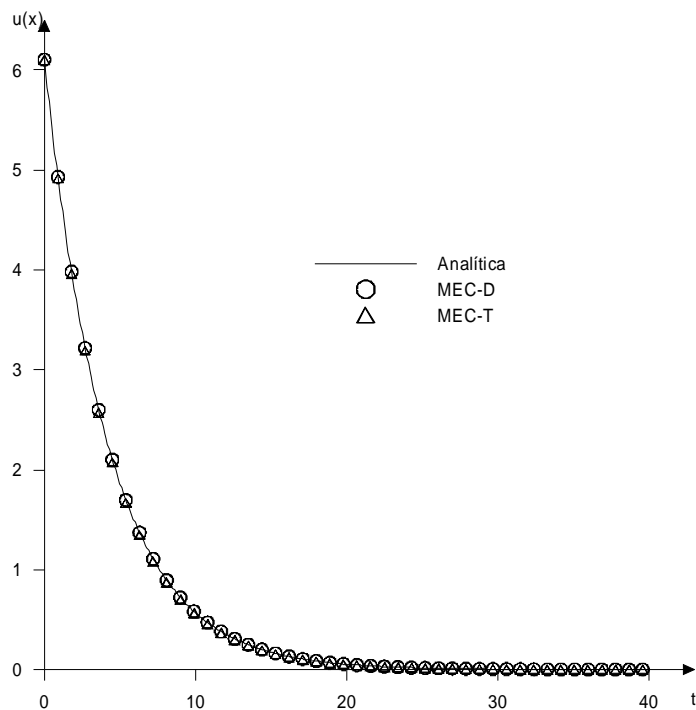
$$B_n = \frac{2 \cdot f(x) \cdot (\cos(n\pi) - 1)}{n\pi}$$

com:

$$f(x) = x \cdot (x - L)$$

#### 4.2.1 Validação dos resultados do exemplo 2

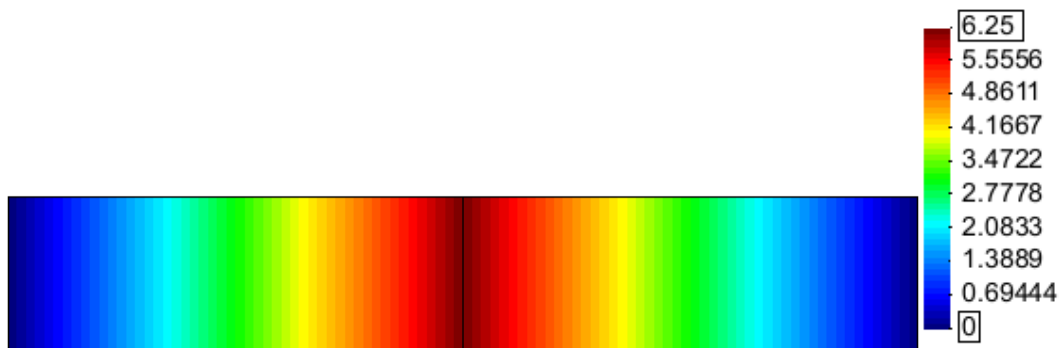
O processo de validação dos resultados é o mesmo que o do exemplo 1. Novamente a discretização do domínio envolveu um único ponto interno



**Gráfico 3: Condição inicial parabólica: potencial em  $x=L/2$**

Como é possível observar no gráfico 3 as soluções numéricas ficaram muito próximas da solução analítica.

Nas figuras (1.8), (1.9) e (1.10), mostra-se a evolução da distribuição de temperaturas ao longo da barra até o estado estacionário.



**Figura 1.8 Barra com condição inicial parabólica: temperatura no instante  $t=1$**

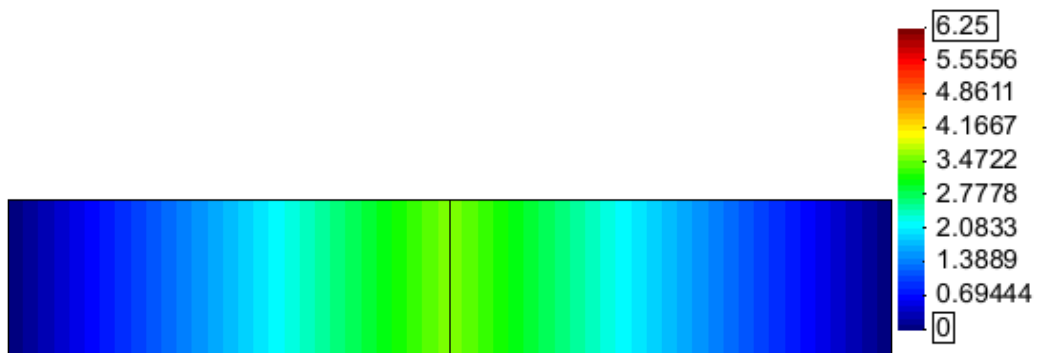


Figura 1.9 Barra com condição inicial parabólica: temperatura no instante  $t=25$ .

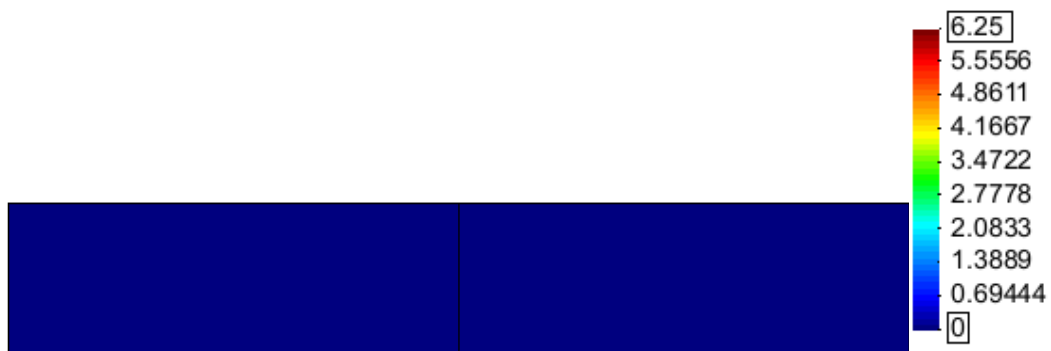


Figura 1.10 Barra com condição inicial parabólica: temperatura no instante  $t=166$ .

### 4.3 EXEMPLO 3

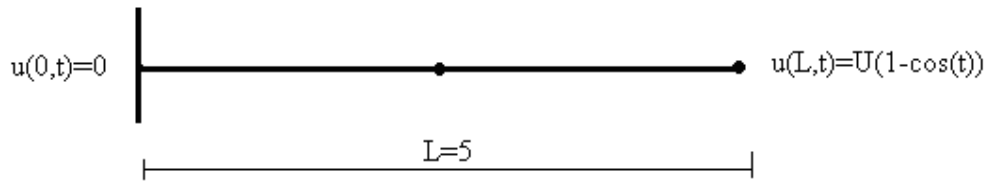


Agora será apresentado um problema que tem condição inicial nula e uma condição de contorno que varia ao longo do tempo. Uma análise deste exemplo com uma formulação do MEC que emprega a solução fundamental dependente do tempo pode ser encontrada no trabalho de OCHIAI *et al.*(2006). Os bons resultados apresentados no trabalho mencionado encorajaram a presente análise.

As condições de contorno são:

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = U_1 \cdot (1 - \cos(t)), \text{ com } U_1 = 1, \text{ ou qualquer constante arbitrária.}$$



**Figura 1.11 1Barra com condição de contorno variável**

e tem-se a seguinte solução analítica para esse problema:

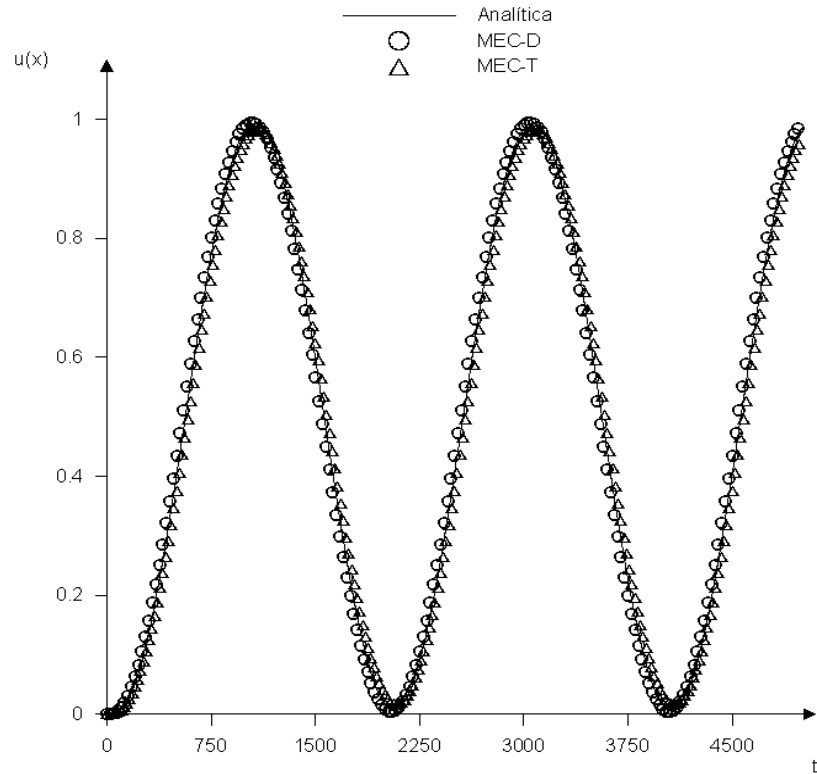
$$u(x,t) = \frac{x}{L} \cdot (1 - \cos(t)) + w(x,t) \quad (1.37)$$

onde  $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$ , sendo  $B_n$  dado por:

$$B_n = \frac{2 \cdot \cos(n \cdot \pi)}{n \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{-\cos(t) + k \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right) \cdot \sin(t) + e^{-k \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2}}{k^2 \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^4 + 1} \right]$$

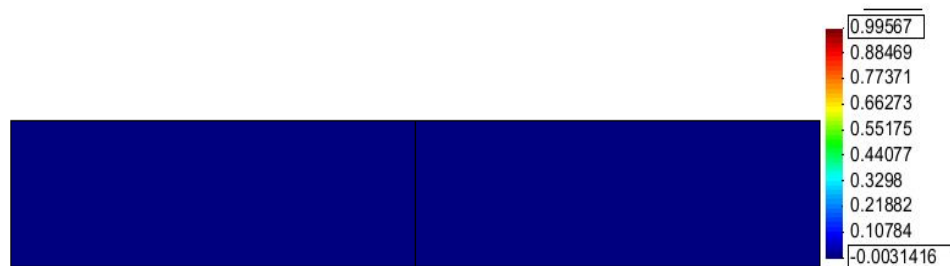
#### 4.3.1 Validação dos resultados do exemplo 3

Para a análise dos resultados obtidos nesse exemplo, foi feito o gráfico do nó no meio da barra, ou seja, para  $L/2$ .

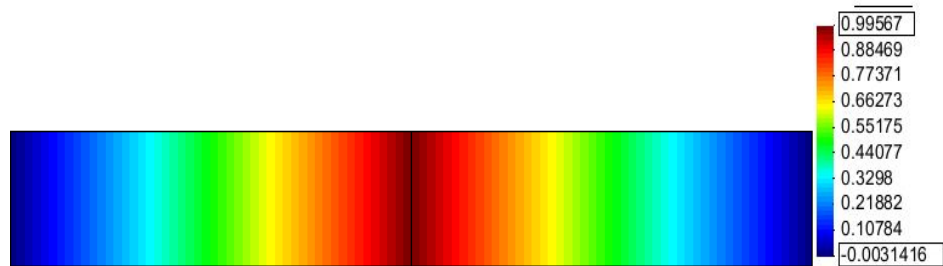


**Gráfico 4: Condição de contorno variável: potencial em  $x=L/2$  e  $k=1,0$**

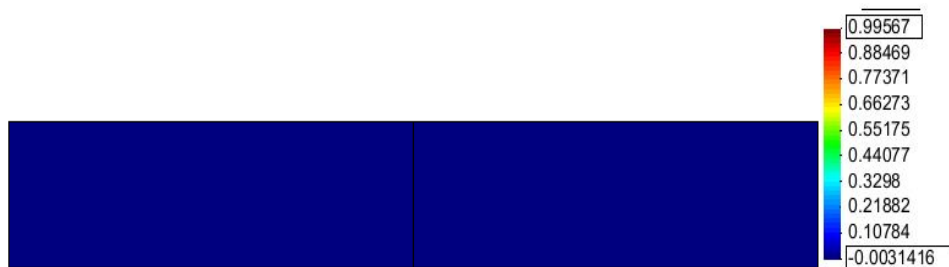
É possível verificar no gráfico acima que as soluções numéricas estão em perfeita concordância com a solução analítica, as figuras (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) mostram como esse problema se comporta fisicamente.



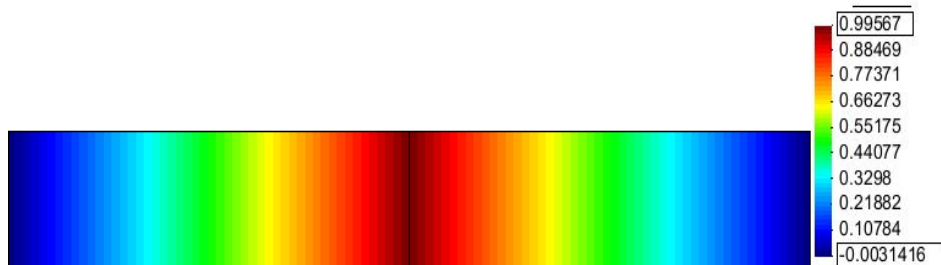
**Figura 1.12 Barra com condição de contorno variável: temperatura no instante  $t=1$ .**



**Figura 1.13 Barra com condição de contorno variável: temperatura no instante  $t = 100$ .**



**Figura 1.14 Barra com condição de contorno variável: temperatura no instante  $t = 200s$ .**

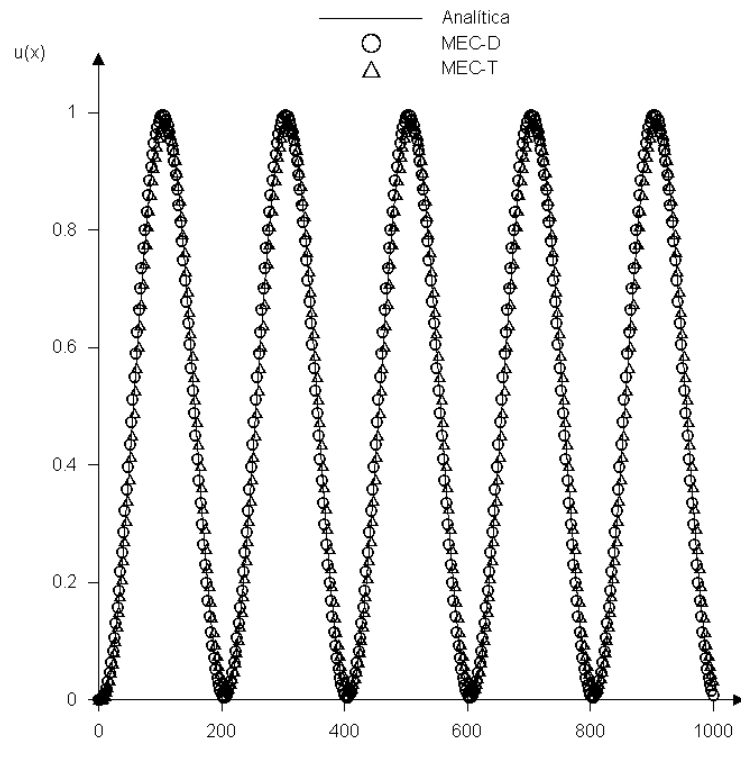


**Figura 1.15 Barra com condição de contorno variável: temperatura no instante  $t = 300$ .**

Observando as figuras acima, pode-se perceber claramente que, nesse problema, a temperatura está oscilando com o passar do tempo.

Dada a natureza do problema, foi feito um estudo mais detalhado onde pode-se mostrar a influencia do coeficiente  $k$  na resposta. Assim sendo, os próximos gráficos

apresentam os resultados para potencial (gráficos 5, 6, 7 e 8) e fluxo (gráficos 9 e 10) com diferentes valores do coeficiente  $k$ .



**Gráfico 5: Condição de contorno variável: potencial em  $x=L/2$  e  $K=0,5$**

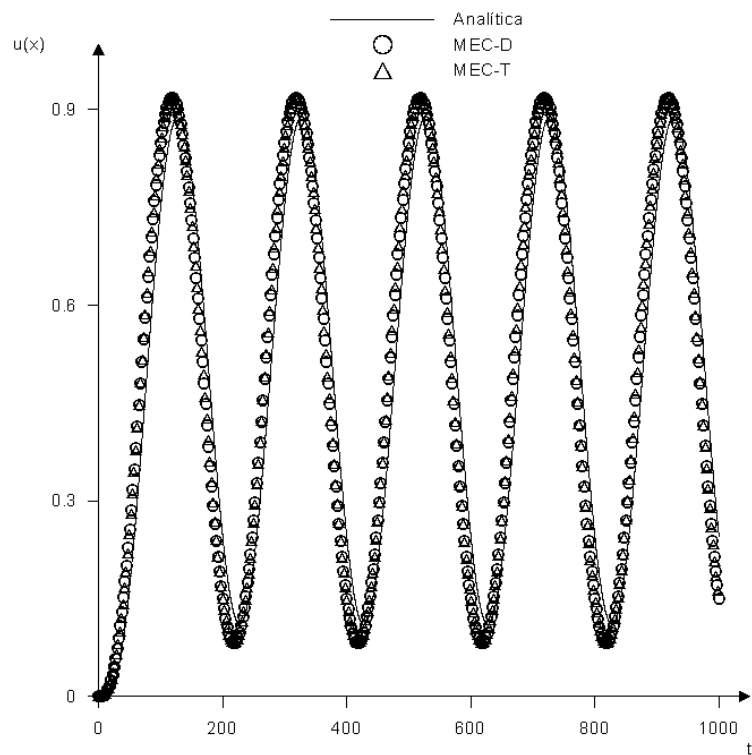


Gráfico 6: Condição de contorno variável: potencial em  $x=L/2$  e  $K=0,1$

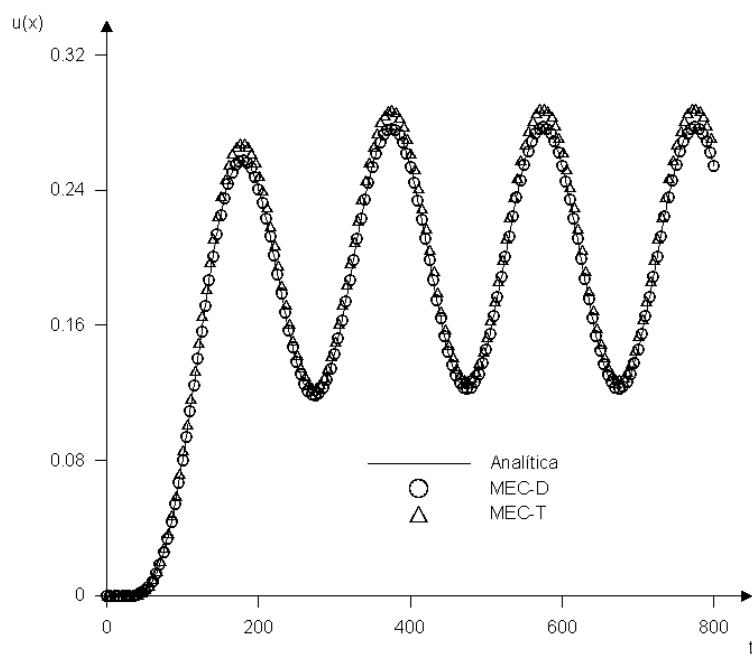


Gráfico 7: Condição de contorno variável: potencial em  $x=L/2$  e  $K=0,25$

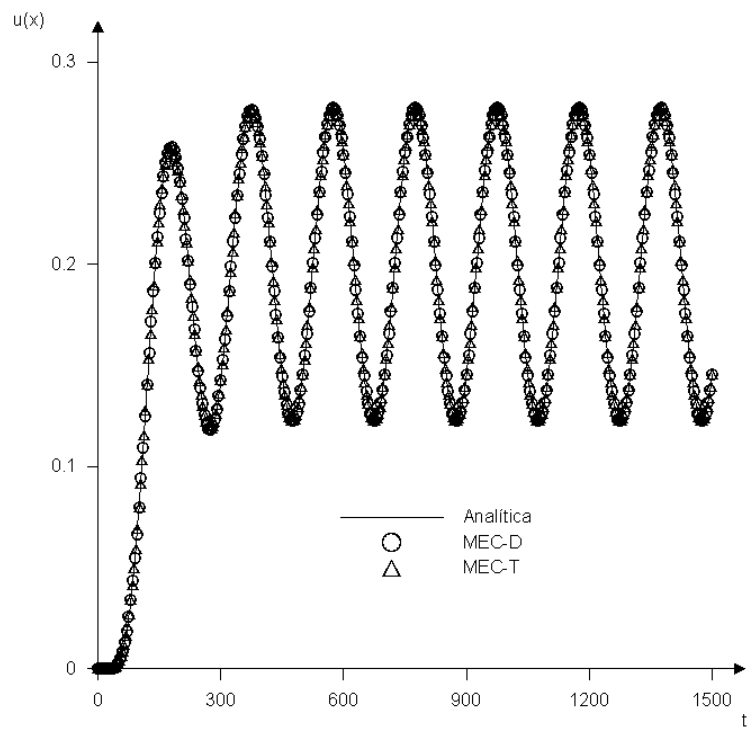


Gráfico 8: Condição de contorno variável: potencial em  $x=L/2$  e  $K=0,01$

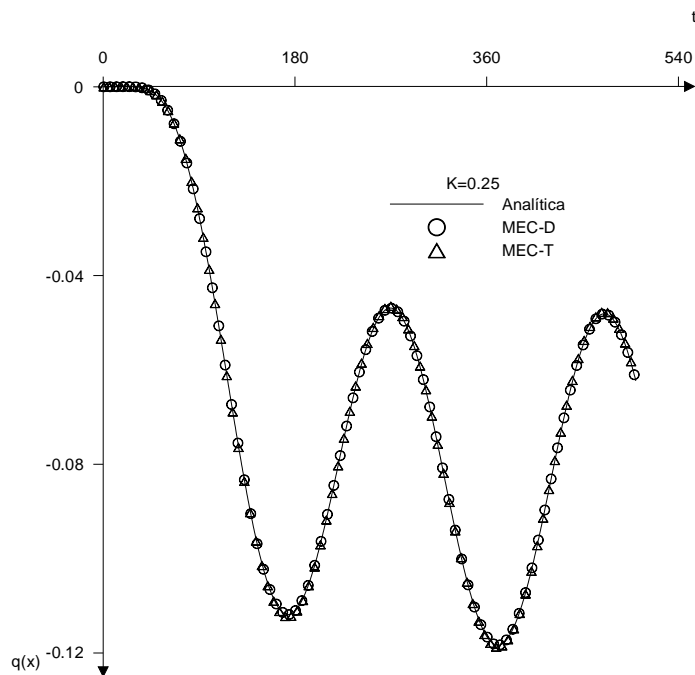
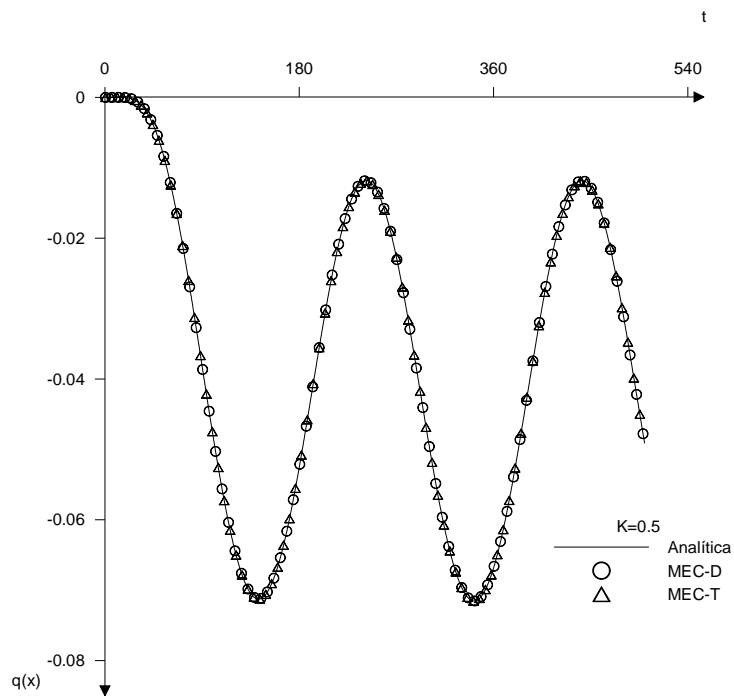


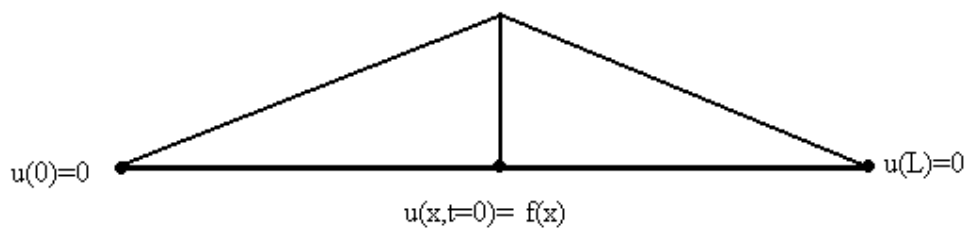
Gráfico 9: Condição de contorno variável: fluxo em  $x=0$  e  $K=0,25$



**Gráfico 10: Condição de contorno variável: fluxo em  $x=0$  e  $K=0,5$**

#### 4.4 EXEMPLO 4

O exemplo a ser apresentado é consiste de uma barra com condições de contorno essenciais nulas e com a condição inicial descrita pela figura (1.16).



**Figura 1.16 Barra com condição inicial  $f(x)$**

A solução analítica é a seguinte:

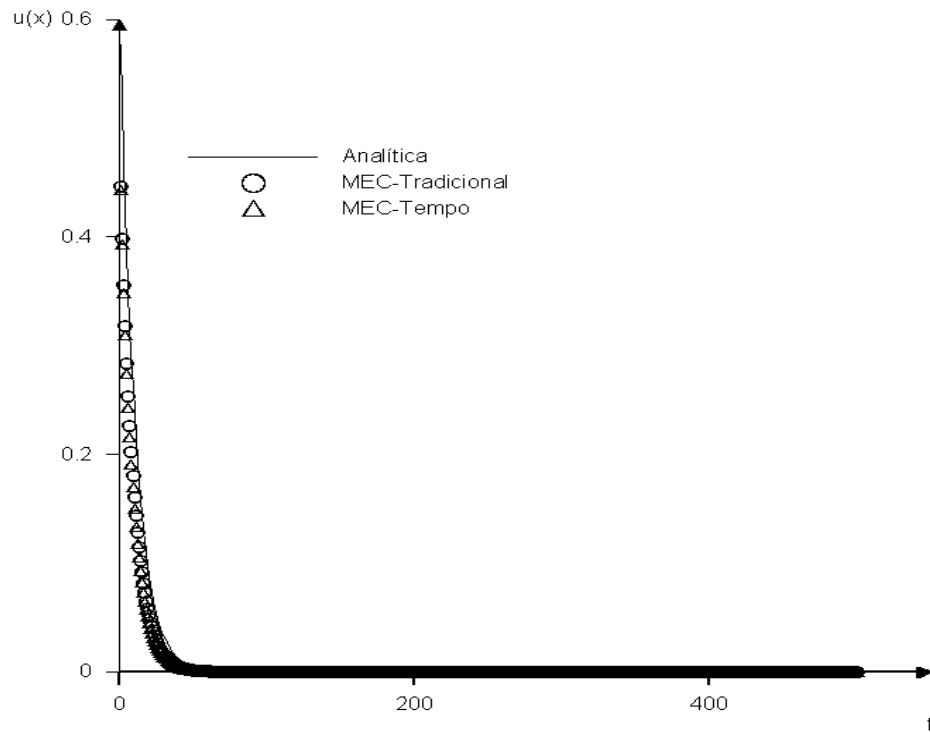
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x) e^{\frac{-n^2 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot t}{L^2}} \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad (1.38)$$

onde:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \text{ com } n = 1, 5, 9, \dots \\ L - x & \text{para } \frac{L}{2} < x \leq L, \text{ com } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

#### 4.4.1 Validação dos resultados do exemplo 3

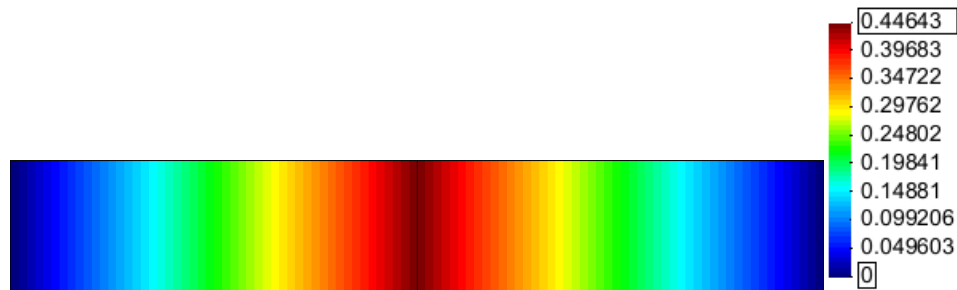
Para validação desse exemplo é apresentado o gráfico para o nó central da barra. Novamente, a barra foi dividida em apenas dois elementos.



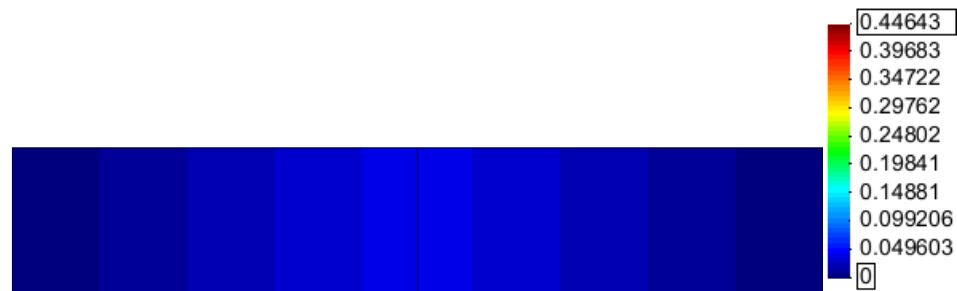
**Gráfico 11: Condição inicial f(x); potencial em x=L/2 e K=1**



Uma análise da evolução da difusão térmica dada essa condição inicial é apresentada nas figuras abaixo.



**Figura 1.17 Barra com condição inicial  $f(x)$ : temperatura no instante  $t=1$ .**



**Figura 1.18 Barra com condição inicial  $f(x)$ : temperatura no instante  $t=25$ .**

Como é possível observar nas figuras, a temperatura na barra vai se estabilizando na temperatura igual à zero, de acordo com o gráfico 1.5 que traz a solução analítica.

#### 4.5 EXEMPLO 5

O exemplo proposto foi incluído com o intuito de se verificar, para um dado valor do coeficiente de condutividade térmica, quais os intervalos de tempo são mais adequados para análise. O problema é o mesmo do exemplo 1 tendo  $k=1,0$ .

Foram escolhidos os cinco intervalos de tempo apresentados abaixo para comparação com a solução analítica:

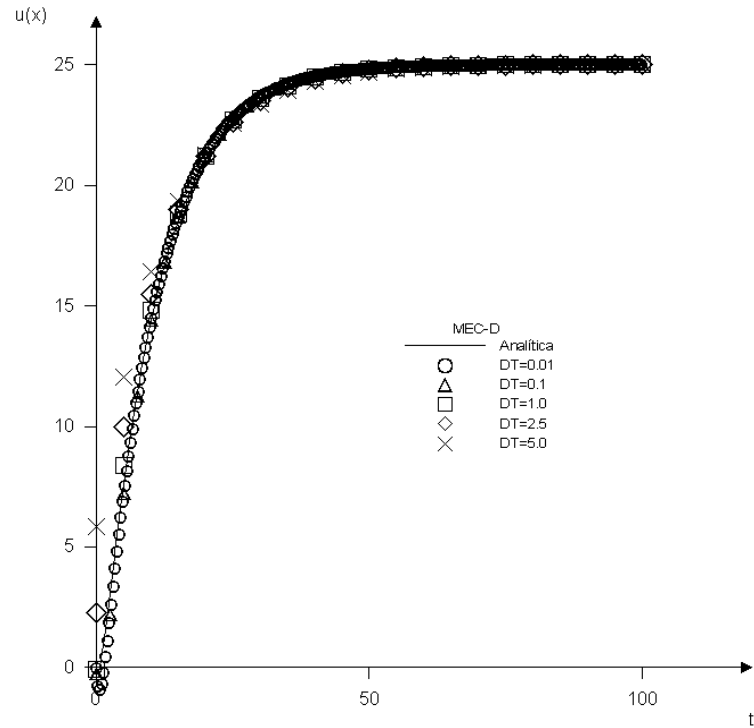
$$\Delta t = 0,01$$

$$\Delta t = 0,1$$

$$\Delta t = 1,0$$

$$\Delta t = 2,5$$

$$\Delta t = 5,0$$



**Gráfico 12: Teste de intervalos de tempo: potencial em  $x=L/2$  e  $K=1,0$**

Através do gráfico 1.10, é possível perceber que se um intervalo de tempo muito grande for adotado um erro numérico acontece. Uma estimativa do intervalo de tempo a ser adotado que leva em conta o valor de  $k$  no problema, em problemas bidimensionais, é dada por WROBEL(1981):

$$\Delta t = \frac{l^2}{2k} \quad (1.39)$$

onde  $l$  é o comprimento da célula adotado na discretização da malha:

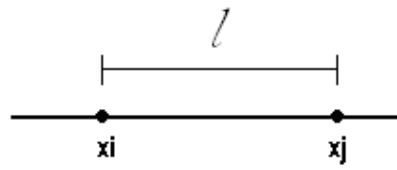


Figura 1.19 Comprimento da célula

## 5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

### 5.1 ORGANIZAÇÃO E FUNCIONAMENTO DO CÓDIGO

O código desenvolvido para análise dos problemas apresentados foi organizado da seguinte maneira:

- No arquivo principal: a declaração do nome do programa, das bibliotecas e módulos utilizados, e chamada das sub-rotinas utilizadas na execução do programa.

- Uma sub-rotina chamada OPEN\_FILES, utilizada para abrir arquivos externos que são utilizados para gravar os dados calculados durante a execução do programa.

- Uma sub-rotina chamada READ\_PROBLEM\_DATA, para ler os dados referentes ao problema, que são informados em tempo de execução pelo usuário.

- Uma sub-rotina chamada CONSTANTS, utilizada para calcular os valores constantes do problema, de acordo com os dados informados pelo usuário.

- Uma sub-rotina chamada MEMORY\_ALLOCATION, utilizada para fazer a alocação dinâmica das matrizes e vetores na memória física do computador, utilizados no problema. Alocação feita de acordo com os dados informados pelo usuário.

- Uma sub-rotina chamada MESH, utilizada para gerar a malha da discretização do problema.

- Uma sub-rotina chamada INITIAL\_CONDITION, utilizada para calcular as condições iniciais do problema e iniciar o vetor das condições iniciais. As condições iniciais são escolhidas pelo usuário no momento da execução do programa, podendo ser valores constantes ou funções pré-definidas.

- Uma sub-rotina chamada MATR, utilizada para fazer a montagem das matrizes H e G, seguindo o padrão de formação apresentado anteriormente.

- Uma sub-rotina chamada INT\_DOMAIN, utilizada para fazer a integração de domínio e montagem da matriz M, e fazer a soma da matriz M com a matriz H, dado o código da condição de contorno.

- Uma sub-rotina chamada STEP\_TIME, utilizada para fazer o processo de marcha no tempo para o problema transiente.

- Uma sub-rotina chamada SISTEM, utilizada para montagem do sistema de equações e resolução do sistema de equações do tipo  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ .

- Uma sub-rotina chamada INVER, utilizada para fazer a inversão da matriz A para solução do sistema de equações; essa subrotina inverte a matriz H e devolve a matriz inversa na própria matriz H.

- Uma sub-rotina chamada WRITE\_PROBLEM\_DATA, utilizada para escrever em um arquivo de texto os resultados obtidos em cada passo de tempo da análise.

- Uma sub-rotina chamada UPDATE\_VECTOR, utilizada para fazer a atualização dinâmica dos vetores do problema.

- Uma sub-rotina chamada DEALLOCATE, utilizada para desalocar todos os vetores e matrizes utilizados durante a execução do programa, quando não são mais utilizadas.

- Uma sub-rotina chamada CLOSE\_FILES, utilizada para fechar todos os arquivos externos utilizados durante o programa.

Todas as sub-rotinas descritas acima foram inseridas em módulos, para melhor organização do programa.

Os módulos foram organizados da seguinte maneira:

- Módulo INPUT

Nesse módulo foram colocadas as sub-rotinas que tratam da parte de entrada e organização dos dados de entrada do problema, que foram informados pelo usuário. São eles:

OPEN\_FILES

READ\_PROBLEM\_DATA

CONSTANTS

MEMORY\_ALLOCATION

MESH

INITIAL\_CONDITION

- Módulo OUTPUT

Nesse módulo foram colocados as sub-rotinas que tratam da organização dos resultados obtidos com a análise, são elas:

WRITE\_PROBLEM\_DATA  
DEALLOCATE  
CLOSE\_FILES

- Módulo MATRIZES

Nesse módulo foram colocadas as sub-rotinas que fazem os cálculos com as matrizes e vetores do problema, são elas:

MATR  
SISTEM  
INT\_DOMAIN  
STEP\_TIME  
UPDATE\_VECTOR

- Módulo VAR:

Nesse módulo foram declaradas todas as variáveis globais utilizadas na execução do programa.

No código gerado não foi necessário a leitura de um arquivo de entrada de dados, pois o programa foi feito para que os dados de entrada sejam fornecidos pelo usuário no momento da execução do programa, e os dados necessários são, como malha, coordenadas dos nós de contorno e domínio, gerados pelo próprio programa em tempo de execução, com base nos dados informados.

Isso pode ser feito sem grandes dificuldades devido a geometria do problema, sendo uma geometria relativamente simples. Para geometrias mais complicadas, principalmente em casos tridimensionais a geração dessa malha não é tão simples de ser feita.

Para isso existem diversos programas desenvolvidos especialmente para tratamento de geração de malhas.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através das análises feitas anteriormente, observando-se os excelentes resultados obtidos, pode-se perceber que o MEC apresenta boa estabilidade e resultados bastante satisfatórios para os problemas abordados nesse trabalho, apesar de ser uma técnica numérica relativamente nova, em comparação com outros métodos.

As implementações dos códigos computacionais também se tornam relativamente mais simplificadas, uma vez que o método reduza a malha do contorno do problema em uma dimensão a dimensão do problema: essa é uma das vantagens de se trabalhar com o MEC.

Nos exemplos apresentados nesse trabalho, pode-se perceber que as soluções tendem a se estabilizar com o passar do tempo, mas isso só acontece para os problemas onde as condições de contornos impostas foram condições constantes, o que não aconteceu no exemplo 3, onde uma condição de contorno variável foi imposta. A condição imposta em um dos contornos do problema foi uma função cossenoidal e, portanto, periódica, daí o comportamento oscilatório do problema.

A formulação apresentada nesse trabalho, denominada MEC-T, onde as funções variam ao longo do tempo, também apresentaram resultados satisfatórios quando comparados com a solução analítica. Essa formulação é a principal contribuição do trabalho.

Os códigos foram implementados em uma linguagem muito poderosa quando se trata de programação científica, o FORTRAN, sendo possível desenvolver códigos simples e com grande rapidez, pois a linguagem oferece uma infinidade de recursos para o programador. Isso possibilita que trabalhos futuros venham acrescentar recursos de uma maneira fácil.

Esses códigos implementados para as duas formulações, MEC-D e MEC-T, apresentaram resultados extremamente satisfatórios, sendo que todos os resultados dos exemplos apresentados foram obtidos com uma malha discretizada em apenas dois elementos, isso significa que foram utilizados apenas três nós, os dois do contorno e apenas um ponto interno. Com esse tipo de discretização é necessário fazer apenas duas integrações de domínio, uma em cada elemento, com isso o ganho computacional é muito bom, pois a duração das análises dos problemas apresentados foi de apenas

alguns segundos de processamento do computador. Isso representa uma maior rapidez na obtenção dos resultados.

## 6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As principais sugestões para trabalhos futuros são:

- a) Utilização de uma solução fundamental dependente do tempo na formulação do MEC-D e do MEC-T;
- b) Implementação computacional da formulação do MEC-T com utilização da solução fundamental dependente do tempo para problemas bidimensionais;
- c) Desenvolvimento do método para barra composta por dois ou mais materiais, ou seja, trabalhar com sub-regiões;
- d) Aplicar a formulação do MEC-T para problemas bidimensionais com domínio infinito e semi-infinito.



## 7 REFERÊNCIAS

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J., **Boundary elements: an introductory course**, Computacional Mechanics Publications and McGraw-Hill, Southhampton, 1989.

BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

BEER, G. **Programing the boundary element method**. An introduction for engineers.

CARRER, J. A. M., MANSUR, W. J. **Scalar Wave Equation by the Boundary Element Method: a D-BEM Approach for One-Dimensional Problems**. Springer – Verlag 2004.

CARRER, J. A. M., MANSUR, W. J. **Alternative time-marching schemes for elastodynamic analysis with the domain boundary element method formulation**. Springer – Verlag 2004.

CARRON, W., GUIMARÃES, O. **Física Volume Único - 2º ed.** Moderna, São Paulo, 2003.

CHAPMAN, S. J. **Fortran 90/95 for Scientists and Engineers**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 2004.

GREENBERG, M. D., “**Advanced Engineering Mathematics**”, Prentice Hall- 2ª edição, New Jersey, 1998

KATSIKADELIS, J.T. **Boundary Element, Theory and Applications**. Elsevier, 2004.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com geometria analítica**, Vol. 1. 3. ed São Paulo: HARBRA, 1990.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com geometria analítica**, Vol. 2. 3. ed São Paulo: HARBRA, 1990.

SCUCIATO, R. F. **Estudo teórico e implementação computacional do método de elementos de contorno aplicado a problemas elastostáticos lineares bidimensionais**, Curitiba, 2007, Dissertação de Mestrado. PPGMNE/UFPR.

SENNA, A.M.S. **Uma Nova Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Análise Propagação de Ondas Escalares**, Rio de Janeiro, 2003, Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ

SOARES, D. **Acoustic Modelling By Bem-Fem Coupling Procedures Taking Into Account Explicit And Implicit Multi-Domain Decomposition Techniques**. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v. 78, p. 1076-1093, 2009.

STEPHENSON G.; **An Introduction to Partial Differential Equations for Science**, Students, Longman, 1970.

VANZUIT, R. J. **Análise do fluxo bidimensional de calor pelo método dos elementos de contorno com soluções fundamentais independentes do tempo**, Curitiba, 2007, Dissertação de Mestrado. PPGMNE/UFPR.

VLADIMIROV, V. S. **Generalized Functions in Mathematical Physics**. Nauka Publishers, Moscow, 1979.

WROBEL, L. C., **Boundary Element Method** - Volume 1, John Wiley & Sons. Ltd, England, 2002.

OCHIAI, Y., STLADEK, V., SLADER, J., **Transient heat conduction analysis by triple-reciprocity boundary element method.** Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 30, p. 194-204, 2006.

CARREIRA, Ana; CARVALHO, Nuno; COSTA, Viviana. Breve História Da Linguagem Fortran, 15 nov. 2001. Disponível em <><http://www.eq.uc.pt/~batateu3/introd.html>

STENSAMANN, B. H. W. Propagação do Calor, **Rio Grande do Sul.** Disponível em <> [http://www.if.ufrgs.br/mpef/mef008/mef008\\_02/Berenice/aula3.html](http://www.if.ufrgs.br/mpef/mef008/mef008_02/Berenice/aula3.html).

## APÊNDICE A.1

### Resolução da Equação da Difusão através do Método dos Elementos de Contorno

Seja dada a equação diferencial que rege problemas de propagação térmica em domínios unidimensionais:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \Omega = [0, \ell] \quad e \quad \Gamma = \{0, \ell\} \quad (1.1)$$

onde  $\Omega$  representa o domínio e  $\Gamma$  o contorno do problema. Com as seguintes condições de contorno:

$$\text{Essenciais} \quad u = \hat{u} \text{ em } \Gamma_u$$

e

$$\text{Naturais} \quad q = \hat{q} \text{ em } \Gamma_q$$

Seja  $w$  uma solução aproximada do problema, que não atende as condições de contorno, resíduos ou erros, são gerados:

em  $\Gamma_u$  dado por  $\varepsilon_{\Gamma_u} = u - \hat{u} \neq 0$  e em  $\Gamma_q$  dado por  $\varepsilon_{\Gamma_q} = q - \hat{q} \neq 0$ , os quais devem ser ponderados.

Tem-se como solução fundamental do problema:

$$u^* = \frac{|x - \xi|}{2} = \frac{\sqrt{(x - \xi)^2}}{2} \quad (1.2)$$

onde:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = \delta(x - \xi) \quad (1.3)$$

A equação (1.1) será resolvida através do MEC; para isso, a equação será ponderada por uma função  $u^*$ . A sentença de resíduos ponderados é:

$$\int_0^\ell \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \right) u^* dx = (u - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (q - \hat{q}) \bar{\bar{w}} \Big|_{x=\ell} \quad (1.4)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equação (1.4):

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* dx = (u - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (q - \hat{q}) \bar{\bar{w}} \Big|_{x=\ell} - \frac{1}{k} \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} u^* dx \quad (1.5)$$

Resolvendo apenas o lado esquerdo da equação (1.5) através de integração por partes tem-se:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

pode-se fazer:

$$\int_0^\ell \frac{d^2 u}{dx^2} u^* dx \quad \left\{ \begin{array}{ll} u = u^* & v = \frac{du}{dx} \\ du = \frac{du^*}{dx} dx & dv = \frac{d^2 u}{dx^2} dx \end{array} \right.$$

e a equação (1.5) pode ser reescrita da forma:

$$u^* \frac{du}{dx} - \int_0^\ell \frac{du}{dx} \frac{du^*}{dx} dx = (u - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (q - \hat{q}) \bar{\bar{w}} \Big|_{x=\ell} - \frac{1}{k} \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} u^* dx \quad (1.6)$$

ou:

$$\int_0^\ell \frac{du}{dx} \frac{du^*}{dx} dx = -(u - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} - (q - \hat{q}) \bar{\bar{w}} \Big|_{x=\ell} + u^* \frac{du}{dx} \Big|_0^\ell + \frac{1}{k} \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} u^* dx \quad (1.7)$$

Integrando a equação (1.7) novamente por partes obtém-se a seguinte expressão:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{du^*}{dx} & v = u \\ du = \frac{d^2 u^*}{dx^2} dx & dv = \frac{du}{dx} \end{array} \right.$$

$$\int_0^\ell u \frac{d^2 u^*}{dx^2} dx = (u - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} (q - \hat{q}) \bar{\bar{w}} \Big|_{x=\ell} + u^* \frac{du}{dx} \Big|_0^\ell - \frac{du^*}{dx} u \Big|_0^\ell + \frac{1}{k} \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} u^* dx \quad (1.8)$$

Da equação (1.3), sabe-se que  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = \delta(x - \xi)$ , logo substituindo esta expressão na equação (1.8) a mesma pode ser reescrita da forma:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u(x) \delta(x - \xi) dx &= (u - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} (q - \hat{q}) \bar{\bar{w}} \Big|_{x=\ell} + u^* \frac{du}{dx} \Big|_0^\ell - \frac{du^*}{dx} u \Big|_0^\ell \\ &+ \frac{1}{k} \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} u^* dx \end{aligned} \quad (1.9)$$

Resolvendo a integral do lado esquerdo da equação (1.9) e sendo  $q = \frac{du}{dx}$  e

$$q^* = \frac{du^*}{dx} \text{ em } x = \ell \text{ e } q = -\frac{du}{dx} \text{ e } q^* = -\frac{du^*}{dx} \text{ em } x=0:$$

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= (u - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} (q - \hat{q}) \bar{\bar{w}} \Big|_{x=\ell} - u^* q \Big|_\ell + u^* q \Big|_0 + u q^* \Big|_\ell - u q^* \Big|_0 \\ &+ \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} u^* dx \end{aligned} \quad (1.10)$$

Desenvolvendo os termos com  $\bar{w}$  e  $\bar{\bar{w}}$  em (1.10):

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= u \bar{w} \Big|_0 - \hat{u} \bar{w} \Big|_0 + q \bar{\bar{w}} \Big|_\ell - \hat{q} \bar{\bar{w}} \Big|_\ell - u^* q \Big|_\ell + u^* q \Big|_0 + u q^* \Big|_\ell - u q^* \Big|_0 \\ &+ \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} u^* dx \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ainda da equação (1.11) tem-se:

em  $x = 0$

$$-u q^* + u \bar{w} = 0$$

$$\text{logo } q^* = \bar{w}$$

em  $x = \ell$

$$-u^* q + q \bar{w} = 0$$

$$\text{logo } u^* = \bar{w}$$

e sendo  $q = \frac{du}{dn}$ , e observando que em  $x=0$  tem-se  $\frac{dx}{dn} = -1$  a equação do MEC-D.

$$u(\xi, t) = -u^* q \Big|_{\ell} + u^* q \Big|_0 + u q^* \Big|_{\ell} - u q^* \Big|_0 + \int_0^{\ell} \dot{u} u^* dx \quad (1.12)$$

ou

$$\begin{aligned} u(\xi, t) = & u^*(\xi, x) q(\xi, x) \Big|_{x=\ell} + u^*(\xi, x) q(\xi, x) \Big|_{x=0} \\ & - u(\xi, x) q^*(\xi, x) \Big|_{x=\ell} - u(\xi, x) q^*(\xi, x) \Big|_{x=0} + \int_0^{\ell} \dot{u}(x, t) u^*(\xi, x) dx \end{aligned} \quad (1.13)$$

## APÊNDICE A.2

### Desenvolvimento da Solução Fundamental Independente do Tempo

Resolução da equação  $\frac{d^2u}{dx^2} = \delta(x - \xi)$ , para encontrar a solução fundamental

$$u = \frac{|x - \xi|}{2}.$$

Dada a equação diferencial:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \delta(x - \xi) \quad (2.1)$$

Integrando a equação (2.1):

$$\int \frac{d^2u}{dx^2} dx = \int \delta(x - \xi) dx \quad (2.2)$$

A integral da função Delta de Dirac, resulta na função Heaviside, que é definida como:

$$H(x) = \frac{1 + \text{sgn}(x)}{2} \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Onde  $\text{sng}(x)$ , é a função sinal.

Logo a equação (2.2) fica:

$$\frac{du}{dx} = H(x - \xi) + C \quad (2.4)$$

Ou ainda:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 + \text{sgn}(x - \xi)}{2} + C_1 \quad (2.5)$$



Integrando novamente a equação (2.5), e sabendo que a integral da função sinal é dada por:

$$\int \text{sgn}(x)dx = |x| + C \quad (2.6)$$

$$\int \frac{du}{dx} dx = \int \frac{1 + \text{sgn}(x - \xi)}{2} + C dx \quad (2.7)$$

Assim, resolvendo a integral indefinida da equação (2.7):

$$u(x) = \frac{x}{2} + \frac{|x - \xi|}{2} + C_1 x + C_2 \quad (2.8)$$

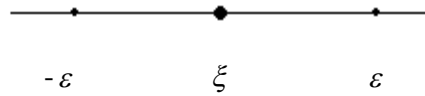
Agora é necessário determinar o valor das constantes  $C_1$  e  $C_2$ .

Primeiramente são agrupados os termos semelhantes da equação (2.8):

$$u(x) = xC_3 + \frac{|x - \xi|}{2} + C_2 \quad (2.9)$$

sendo  $\left(\frac{1}{2} + C_1\right) = C_3$

Para isso será avaliada em uma certa região em torno do ponto  $\xi$ , que será denominada  $\varepsilon$ .



É considerado agora que  $u(\xi - \varepsilon) = u(\xi + \varepsilon)$ , assim pode-se reescrever a equação (2.9) utilizando esses parâmetros:

$$u(\xi - \varepsilon) = C_3(\xi - \varepsilon) + \frac{|\xi - \varepsilon - \xi|}{2} + C_2 \quad (2.10)$$

e

$$u(\xi + \varepsilon) = C_3(\xi + \varepsilon) + \frac{|\xi + \varepsilon - \xi|}{2} + C_2 \quad (2.11)$$

Como foi definido que  $u(\xi - \varepsilon) = u(\xi + \varepsilon)$  iguala-se a equação (2.10) à equação (2.11):

$$C_3(\xi - \varepsilon) + \frac{|\xi - \varepsilon - \xi|}{2} + C_2 = C_3(\xi + \varepsilon) + \frac{|\xi + \varepsilon - \xi|}{2} + C_2 \quad (2.12)$$

Eliminando os termos semelhantes da igualdade, a equação 2.12 fica reduzida à:

$$C_3(\xi - \varepsilon) = C_3(\xi + \varepsilon) \quad (2.13)$$

Finalmente, de 2.13 obtém-se  $C_3 = 0$  e, conseqüentemente,  $C_1 = -\frac{1}{2}$ .

Substituindo o valor das constantes na equação (2.9), obtém-se a solução fundamental do problema com domínio unidimensional:

$$u(x) = \frac{|x - \xi|}{2} \quad (2.14)$$

### APÊNDICE A.3

#### **Demonstração do Desenvolvimento de uma Solução Analítica Geral para Condições de Contorno Constantes no Tempo**

Dada a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.15)$$

Para resolver a equação (2.15) é utilizada a técnica de separação de variáveis, onde uma solução do tipo

$$u = X(x)T(t) \quad (2.16)$$

é adotada.

Agora substituindo a equação (2.16) em (2.15) obtém-se:

$$X''T = \frac{1}{k} XT' \quad (2.17)$$

Dividindo a equação (2.17) por (2.16), é possível separar as variáveis da equação:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} \quad (2.18)$$

É possível perceber que em cada lado da equação tem-se apenas uma variável, assim igualando a equação (2.18) a um  $-c^2$  tem-se:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -c^2 \quad (2.19)$$

Separando em duas equações:

$$\begin{aligned} X'' + c^2 X &= 0 \\ T' + c^2 k^2 T &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Agora é necessário analisar dois casos distintos, quando  $c = 0$  e  $c \neq 0$ .

Sendo  $c = 0$ :

$$\begin{aligned} X'' &= 0 \\ T' &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Da equação (2.21):

$$\begin{aligned} X &= Fx + G \\ T &= H \end{aligned} \quad (2.22)$$

Agora analisando quando  $c \neq 0$ :

Para X uma solução que satisfaz a equação é escrita em termos de cossenos e, para T, uma solução exponencial pode ser empregada:

$$\begin{aligned} X &= A \cos(cx) + B \sin(cx) \\ T &= E e^{(-c^2 k^2 t)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Agora é possível fazer uma combinação linear de todas as soluções encontradas:

$$u(x, t) = (A \cos(cx) + B \sin(cx)).E e^{(-c^2 k^2 t)} + (Fx + G).H \quad (2.24)$$

A equação (2.24) pode ser escrita da seguinte forma:

$$u(x, t) = (A^* \cos(cx) + B^* \sin(cx)).e^{(-c^2 k^2 t)} + F^* x + G^* \quad (2.25)$$

Onde  $A^* = A.E$ ,  $B^* = B.E$ ,  $F^* = F.H$  e  $G^* = G.H$ .

Agora aplicando as condições de contorno e condição inicial:

$$u(0, t) = U_1$$

$$u(L, t) = U_2$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

Aplicando a primeira condição de contorno na equação (2.25):

$$(A \cos(0) + B \sin(0)).C e^{-k.c^2.t} + F^*.0 + G^* = U_1 \quad (2.26)$$

Da equação (2.26) resta apenas:

$$A.C.e^{-k.c^2.t} + F^* = U_1 \quad (2.27)$$

Fazendo  $A=0$ , tem-se que  $F^* = U_1$ , assim a equação (2.25) fica da seguinte forma:

$$u(x,t) = B^* \sin(cx).e^{(-c^2 k^2 t)} + F^* x + U_1 \quad (2.28)$$

Aplicando a segunda condição de contorno:

$$B^* \sin(c.L).e^{(-L^2 k^2 t)} + F^* L + U_1 = U_2 \quad (2.29)$$

Considerando  $B^* \sin(c.L).e^{(-L^2 k^2 t)} = 0$ , tem-se que  $\sin(c.L) = 0$ , ou seja,  $c.L = \frac{n.\pi}{2}$ ; portanto:

$$c = \frac{n.\pi}{2.L} \quad (2.30)$$

Da equação (2.29) é possível obter o valor da constante  $F^*$ :

$$F^* = \frac{U_2 - U_1}{L} \quad (2.31)$$

Substituindo (2.30) e (2.31) em (2.28):

$$u(x,t) = B^* \sin\left(\frac{n.\pi.x}{2.L}\right).e^{\left(-\left(\frac{n.\pi}{2.L}\right)^2 k^2 t\right)} + \left(\frac{U_2 - U_1}{L}\right).x + U_1 \quad (2.32)$$

Aplicando a condição inicial do problema, onde  $f$  é uma função dada:

$$B^* \sin\left(\frac{n.\pi.x}{2.L}\right).e^{\left(-\left(\frac{n.\pi}{2.L}\right)^2 k^2 .0\right)} + \left(\frac{U_2 - U_1}{L}\right).x + U_1 = f(x) \quad (2.33)$$

$$B^* \sin\left(\frac{n.\pi.x}{2.L}\right) + \left(\frac{U_2 - U_1}{L}\right).x + U_1 = f(x) \quad (2.34)$$

Reescrevendo a equação (2.34):

$$B^* \sin\left(\frac{n.\pi.x}{2.L}\right) = f(x) - \left(\frac{U_2 - U_1}{L}\right).x - U_1 \quad (2.35)$$

Fazendo uma expansão de  $f(x)$  em série de Fourier, chega-se a uma solução da equação da difusão para condições de contorno constantes e condição inicial sendo uma função.

Como a solução de uma equação diferencial é a combinação linear de todas as soluções possíveis, podemos escrever a solução como sendo um somatório das soluções, sendo que  $n$  varia de 1 até o infinito.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \sin\left(\frac{n.\pi.x}{2.L}\right) \cdot e^{\left(-\left(\frac{n.\pi}{2.L}\right)^2 k^2 t\right)} + \left(\frac{U_2 - U_1}{L}\right).x + U_1 \quad (2.36)$$

Onde  $B_n^*$  é dado por:

$$B_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n.\pi.x}{2.L}\right) \cdot e^{\left(-\left(\frac{n.\pi}{2.L}\right)^2 k^2 t\right)} \cdot \left(f(x) - \left(\frac{U_2 - U_1}{L}\right).x - U_1\right) dx \quad (2.37)$$